

# Anmerkungen zum neunten Problemschach-Wettbewerb des Schachverbandes Württemberg

von Martin Hintz, Pinneberg (November 2020)

## 1. Aufgabenstellung

### 1.1. Formulierung der Aufgabe

In „Problemschach für Tiger“ Nr. 28 vom Juni 2020 veröffentlichte Wolfgang Erben die Aufgabenstellung des 9. Problemschach-Wettbewerbs des SVW.

- Grundlage ist die Partie *CarCar*: Caruana – Carlsen, Sao Paulo 24.9.2012.
- Gefordert ist eine Partie *P*, welche wie *CarCar* 60 Felder **besucht** – also betritt oder überschreitet. Jeder Zug dieser Partie *P* muss in *CarCar* **vorkommen**.
- Die kürzeste derartige Partie gewinnt. Bei gleicher Länge bekommt den Vorrang, wer zuerst 59 Felder besucht. Dieses Prinzip wird nötigenfalls mit 58, 57, ... Feldern fortgesetzt.

Die beiden durch Fettdruck hervorgehobenen Begriffe „besuchen“ und „vorkommen“ werden im Text folgendermaßen präzisiert (sinngemäße Wiedergabe):

- Ein Feld wird in einem Zug besucht, wenn das Feld in diesem Zug entweder betreten oder überschritten wird. Das Verlassen eines Feldes gilt hingegen nicht als Besuch.
- Ein Zug *Z* der Partie *P* kommt in *CarCar* vor, wenn es in *CarCar* einen Zug gibt, der in Farbe und Art des ziehenden Steins sowie in Ausgangs- und Zielfeld der Bewegung des ziehenden Steins mit *Z* übereinstimmt. Weitere Merkmale des Zuges (schlagend / nichtschlagend, ggf. Art des geschlagenenen Steins, ggf. en passant oder nicht, Zug mit / ohne Schachgebot) spielen dabei ausdrücklich keine Rolle. (Bei Bauernumwandlungen ist aber natürlich die Art der Umwandlungsfigur wichtig. In *CarCar* kommt die Umwandlung 85. d7-d8=D vor. Wie sich herausstellen wird, hat dieser Umwandlungszug für die Bearbeitung der Aufgabenstellung keine praktische Bedeutung.)

### 1.2. Die Partie CarCar

In der nachfolgenden Tabelle wird die zugrundeliegende Partie *CarCar* in Langnotation wiedergegeben (d.h. mit Startfeldern der Züge), um das Nachschlagen der betrachteten Züge in den weiteren Ausführungen zu erleichtern. Züge, die im Partieverlauf vorher bereits gleichlautend vorgekommen sind, werden grau hinterlegt. Für die Bearbeitung der Aufgabenstellung spielen diese Zugwiederholungen (15 weiße, 5 schwarze) offenbar keine Rolle.

Zug Nr.	Weiß	Schwarz		Zug Nr.	Weiß	Schwarz		Zug Nr.	Weiß	Schwarz
1.	e2-e4	e7-e6		31.	Sf1-e3	Sf5xe3		61.	Te1-a1	Ta6-b6
2.	d2-d4	d7-d5		32.	Lc1xe3	Le8xh5		62.	Ta1-b1	Kf7-g6
3.	Sb1-c3	Lf8-b4		33.	Kh2-g3	Lh5-g6		63.	Kb2-c1	Tb6-a6
4.	e4-e5	c7-c5		34.	Ta2-b2	h6-h5		64.	Kc1-b2	Kg6-f5
5.	a2-a3	Lb4xc3+		35.	f2-f3	g5-g4		65.	Tb1-e1	Ta6-b6
6.	b2xc3	Sg8-e7		36.	Le3-g5	Tf6-f5		66.	Te1-b1	a7-a5
7.	Sg1-f3	Sb8-c6		37.	f3-f4	Tf8-e8		67.	Kb2-c1	Le4-g2
8.	Lf1-d3	Lc8-d7		38.	Te1-e2	Kb8-c7		68.	Kc1-d2	Kf5-e4
9.	O-O	Dd8-c7		39.	Tb2-b1	Tf5-f7		69.	Tb1-e1+	Ke4-f3
10.	Tf1-e1	Sc6-a5		40.	Tb1-h1	Tf7-h7		70.	Te1-e2	b5-b4
11.	Sf3-g5	Se7-g6		41.	Kg3-f2	Kc7-b6		71.	a3xb4	a5xb4
12.	Te1-e3	c5-c4		42.	g2-g3	Kb6-a5		72.	Te2-e3+	Kf3-f2
13.	Ld3-e2	Sa5-c6		43.	Kf2-e3	Lg6-f5		73.	Te3-e2+	Kf2-f3
14.	Le2-h5	Sc6-e7		44.	Ke3-d2	Te8-c8		74.	Te2-e3+	Kf3-f2
15.	Dd1-g4	Ld7-a4		45.	Lg5-h4	Th7-d7		75.	Te3-e2+	Kf2-g1
16.	Ta1-a2	Se7-f5		46.	Th1-b1	Tc8-c6		76.	Te2-e1+	Kg1-h2
17.	Te3-e1	O-O-O		47.	Te2-e1	Tc6-b6		77.	c3xb4	Tb6xb4
18.	Sg5-f3	Kc8-b8		48.	Tb1xb6	Ka5xb6		78.	Te1xe6	Lg2-e4
19.	h2-h4	Td8-f8		49.	Te1-b1+	Kb6-c7		79.	Te6xe4	d5xe4
20.	Dg4-h3	Sg6-e7		50.	Kd2-c1	Td7-d6		80.	f4-f5	Kh2-g2
21.	Dh3-h2	h7-h6		51.	Kc1-b2	Td6-b6+		81.	Kd2-e3	Tb4-b2
22.	Lh5-g4	g7-g5		52.	Kb2-c1	Tb6-a6		82.	d4-d5	Tb2xc2
23.	h4-h5	Sf5-g7		53.	Kc1-b2	Lf5-e4		83.	d5-d6	c4-c3
24.	Sf3-d2	f7-f5		54.	Lh4-g5	Kc7-d7		84.	d6-d7	Tc2-d2
25.	e5xf6	Dc7xh2+		55.	Lg5-h4	Kd7-e8		85.	d7-d8=D	Td2xd8
26.	Kg1xh2	Tf8xf6		56.	Kb2-a2	b7-b6		86.	Lh4xd8	h5-h4
27.	Lg4-f3	Th8-f8		57.	Ka2-b2	Ke8-f7		87.	g3xh4	g4-g3
28.	Sd2-f1	Se7-f5		58.	Tb1-e1	b6-b5		88.	f5-f6	c3-c2
29.	Lf3-g4	La4-e8		59.	Te1-b1	Kf7-g6		89.	Ke3-d2	e4-e3+
30.	Lg4xf5	Sg7xf5		60.	Tb1-e1	Kg6-f7		90.	Kd2xc2	e3-e2
								91.	Ld8-a5	

## 2. Lösung

Wie wir zeigen werden, stellt die folgende Partie (mit 33,0 Zügen) eine optimale Lösung der Aufgabe dar, d.h. sie ist eine Lösung, die unter den Kriterien der Aufgabenstellung nicht weiter verbessert werden kann.

### Partie P\_MH:

1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. Le3 e6 5. Lg5 Lb4+ 6. Sc3 a5 7. Lh4 c5 8. Lxd8 Sc6 9. Lxa5 Sxa5 10. Sf3 O-O-O 11. Ld3 Tf8 12. O-O h6 13. e5 g5 14. a3 f5 15. exf6 e.p. Txf6 16. Tfe1 Tf5 17. Ta2 Tf7 18. Tea1 Tfh7 19. h4 Td7 20. h5 Td6 21. Kh2 Tb6 22. axb4 Txb4 23. Kg3 Txb2 24. Tb1 c4 25. Th1 Txc2 26. Sd2 Se7 27. f3 Tf8 28. Kf2 Le8 29. Le2 Lxh5 30. Dh3 Lg6 31. Dh2 Lf5 32. Sf1 Le4 33. f4 Lxg2.

### 3. Beweis

#### 3.1. Züge kommen in CarCar vor

Zunächst soll nun der Nachweis erbracht werden, dass die Partie *P\_MH* die Bedingungen aus der Aufgabenstellung erfüllt. Im ersten Schritt wollen wir uns davon überzeugen, dass jeder der 66 Einzelzüge aus der Partie *P\_MH* in der Partie *CarCar* tatsächlich vorkommt. Hierzu dient die nachstehende Tabelle:

Zug Nr. ( <i>P_MH</i> )	Zug Weiß	Zug Nr. ( <i>CarCar</i> )	Zug Schwarz	Zug Nr. ( <i>CarCar</i> )
1.	e2-e4	1.	d7-d5	2.
2.	Dd1-g4	15.	Lc8-d7	8.
3.	d2-d4	2.	Ld7-a4	15.
4.	Lc1-e3	32.	e7-e6	1.
5.	Le3-g5	36.	Lf8-b4	3.
6.	Sb1-c3	3.	a7-a5	66.
7.	Lg5-h4	45., 55.	c7-c5	4.
8.	Lh4-d8	86.	Sb8-c6	7.
9.	Ld8-a5	91.	Sc6-a5	10.
10.	Sg1-f3	7.	O-O-O	17.
11.	Lf1-d3	8.	Td8-f8	19.
12.	O-O	9.	h7-h6	21.
13.	e4-e5	4.	g7-g5	22.
14.	a2-a3	5.	f7-f5	24.
15.	e5-f6	25.	Tf8-f6	26.
16.	Tf1-e1	10.	Tf6-f5	36.
17.	Ta1-a2	16.	Tf5-f7	39.
18.	Te1-a1	61.	Tf7-h7	40.
19.	h2-h4	19.	Th7-d7	45.
20.	h4-h5	23.	Td7-d6	50.
21.	Kg1-h2	26.	Td6-b6	51.
22.	a3-b4	71.	Tb6-b4	77.
23.	Kh2-g3	33.	Tb4-b2	81.
24.	Ta1-b1	62.	c5-c4	12.
25.	Tb1-h1	40.	Tb2-c2	82.
26.	Sf3-d2	24.	Sg8-e7	6.
27.	f2-f3	35.	Th8-f8	27.
28.	Kg3-f2	41.	La4-e8	29.
29.	Ld3-e2	13.	Le8-h5	32.
30.	Dg4-h3	20.	Lh5-g6	33.
31.	Dh3-h2	21.	Lg6-f5	43.
32.	Sd2-f1	28.	Lf5-e4	53.
33.	f3-f4	37.	Le4-g2	67.

#### 3.2. Besuch von 60 Feldern

Im zweiten Schritt ist nun noch zu verifizieren, dass die Partie *P\_MH* tatsächlich 60 Felder besucht. Hierzu dienen die beiden nachfolgenden Tabellen. In der ersten Tabelle werden zu jedem Zug der Partie *P\_MH* die Felder notiert, die in diesem Zug erstmals im Partieverlauf besucht werden. In der zweiten Tabelle wird die gleiche Information nochmals aus der Perspektive der Felder dargestellt: Zu

jedem Feld des Schachbretts werden Nummer und Farbe des Zugs der Partie *P\_MH* angegeben, in dem dieses Feld erstmals besucht wird.

Zug Nr. ( <i>P_MH</i> )	Zug Weiß	(neue) Felder	Zug Schwarz	(neue) Felder
1.	e2-e4	e3, e4	d7-d5	d6, d5
2.	Dd1-g4	e2, f3, g4	Lc8-d7	d7
3.	d2-d4	d3, d4	Ld7-a4	c6, b5, a4
4.	Lc1-e3	d2	e7-e6	e6
5.	Le3-g5	f4, g5	Lf8-b4	e7, c5, b4
6.	Sb1-c3	c3	a7-a5	a6, a5
7.	Lg5-h4	h4	c7-c5	---
8.	Lh4-d8	f6, d8	Sb8-c6	---
9.	Ld8-a5	c7, b6	Sc6-a5	---
10.	Sg1-f3	---	O-O-O	c8, b8
11.	Lf1-d3	---	Td8-f8	e8, f8
12.	O-O	f1, g1	h7-h6	h6
13.	e4-e5	e5	g7-g5	g6
14.	a2-a3	a3	f7-f5	f5
15.	e5-f6	---	Tf8-f6	f7
16.	Tf1-e1	e1	Tf6-f5	---
17.	Ta1-a2	a2	Tf5-f7	---
18.	Te1-a1	d1, c1, b1, a1	Tf7-h7	g7, h7
19.	h2-h4	h3	Th7-d7	---
20.	h4-h5	h5	Td7-d6	---
21.	Kg1-h2	h2	Td6-b6	---
22.	a3-b4	---	Tb6-b4	---
23.	Kh2-g3	g3	Tb4-b2	b3, b2
24.	Ta1-b1	---	c5-c4	c4
25.	Tb1-h1	h1	Tb2-c2	c2
26.	Sf3-d2	---	Sg8-e7	---
27.	f2-f3	---	Th8-f8	g8
28.	Kg3-f2	f2	La4-e8	---
29.	Ld3-e2	---	Le8-h5	---
30.	Dg4-h3	---	Lh5-g6	---
31.	Dh3-h2	---	Lg6-f5	---
32.	Sd2-f1	---	Lf5-e4	---
33.	f3-f4	---	Le4-g2	g2

	a	b	c	d	e	f	g	h	
<b>8</b>	---	10 s	10 s	8 w	11 s	11 s	27 s	---	<b>8</b>
<b>7</b>	---	---	9 w	2 s	5 s	15 s	18 s	18 s	<b>7</b>
<b>6</b>	6 s	9 w	3 s	1 s	4 s	8 w	13 s	12 s	<b>6</b>
<b>5</b>	6 s	3 s	5 s	1 s	13 w	14 s	5 w	20 w	<b>5</b>
<b>4</b>	3 s	5 s	24 s	3 w	1 w	5 w	2 w	7 w	<b>4</b>
<b>3</b>	14 w	23 s	6 w	3 w	1 w	2 w	23 w	19 w	<b>3</b>
<b>2</b>	17 w	23 s	25 s	4 w	2 w	28 w	33 s	21 w	<b>2</b>
<b>1</b>	18 w	18 w	18 w	18 w	16 w	12 w	12 w	25 w	<b>1</b>
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	

Damit ist bewiesen, dass die Partie *P\_MH* eine zulässige Lösung darstellt. Die Forderung der Aufgabe ist somit in 33,0 Zügen (66 Einzelzügen) darstellbar.

### 3.3. Minimale Zügezahl der Partie

Wir wollen nun zeigen, dass es keine Lösung mit weniger als 33,0 Zügen gibt.

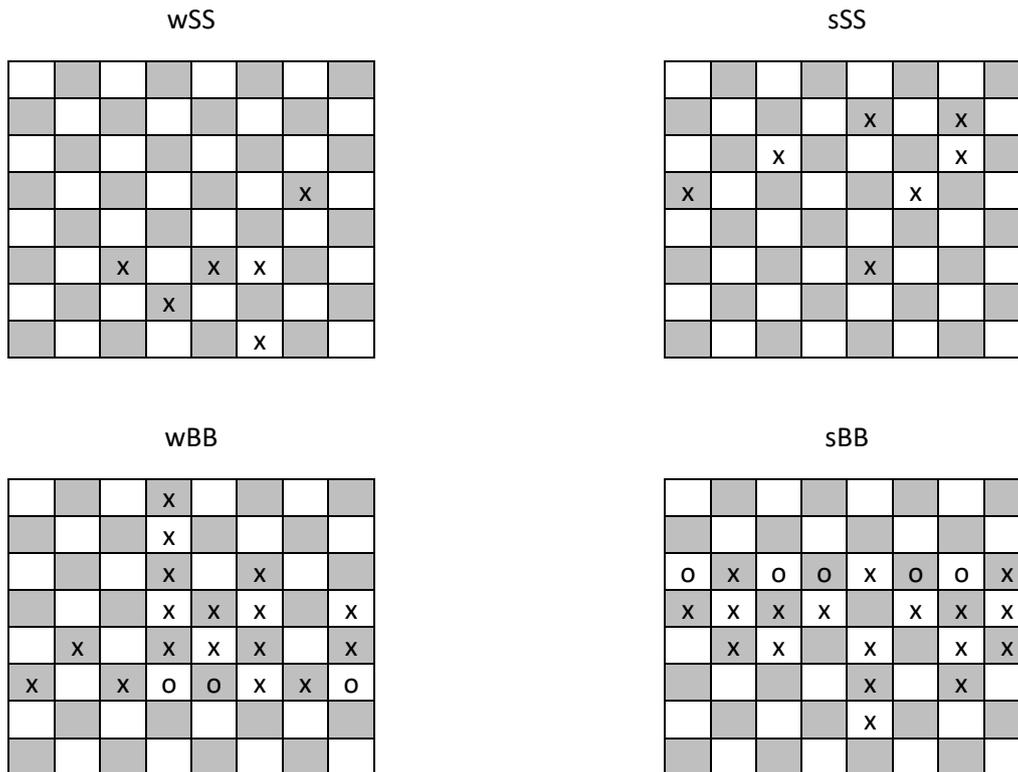
#### 3.3.1. Zügevorrat

Für die weiteren Überlegungen ist es nützlich, die Zugfolgen zu notieren, die die weißen und schwarzen Steine im Verlauf der Partie *CarCar* durchlaufen.

Steine	Züge	Anzahl
wK	O-O, Kg1-h2-g3-f2-e3-d2-c1-b2-c1-b2-a2-b2-c1-b2-c1-d2-e3-d2-c2	19
wD	Dd1-g4-h3-h2	3
wTT	Ta1-a2-b2-b1-h1-b1-b6; O-O, Tf1-e1-e3-e1-e2-e1-b1-e1-b1-e1-a1-b1-e1-b1-e1-e2-e3-e2-e3-e2-e1-e6-e4	6 + 22 + Rochade
wLL	Lc1-e3-g5-h4-g5-h4-d8-a5; Lf1-d3-e2-h5-g4-f3-g4-f5	7 + 7
wSS	Sb1-c3; Sg1-f3-g5-f3-d2-f1-e3	1 + 6
wBB	a2-a3-b4; b2-c3-b4; d2-d4-d5-d6-d7-d8=D; e2-e4-e5-f6; f2-f3-f4-f5-f6; g2-g3-h4; h2-h4-h5	20
sK	O-O-O, Kc8-b8-c7-b6-a5-b6-c7-d7-e8-f7-g6-f7-g6-f5-e4-f3-f2-f3-f2-g1-h2-g2	22
sD	Dd8-c7-h2	2
sTT	O-O-O, Td8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-a6-b6-a6-b6-b4-b2-c2-d2-d8; Th8-f8-e8-c8-c6-b6	17 + 5 + Rochade
sLL	Lc8-d7-a4-e8-h5-g6-f5-e4-g2-e4; Lf8-b4-c3	9 + 2
sSS	Sb8-c6-a5-c6-e7-f5-g7-f5-e3; Sg8-e7-g6-e7-f5	8 + 4
sBB	a7-a5-b4; b7-b6-b5-b4; c7-c5-c4-c3-c2; d7-d5-e4-e3-e2; e7-e6; f7-f5; g7-g5-g4-g3; h7-h6-h5-h4	21

Wir visualisieren zusätzlich die Felder, die von den zwölf verschiedenen Steintypen besucht werden, durch Diagramme. In den Diagrammen bezeichnet ein Kreuz (x) ein betretenes Feld und ein Kreis (o) ein überschrittenes Feld, das nicht betreten wird. Die Diagramme enthalten weniger Information als die vorstehenden Listen, aber sie sind für die nachfolgenden Überlegungen trotzdem nützlich.





Aus den Diagrammen ist z.B. ersichtlich, dass die vier Felder a7, b7, a8, h8 im Verlauf der Partie *CarCar* nicht besucht werden.

### 3.3.2. Zwingend benötigte schwarze Züge

Wir betrachten nun eine beliebige Partie *P*, die eine Lösung der Aufgabenstellung darstellt. Wir möchten beweisen, dass *P* mindestens 33,0 Züge umfassen muss. Dazu richten wir unser Augenmerk besonders auf die Züge von Schwarz. Da die Partie *CarCar* die vier Felder a7, b7, a8, h8 nicht besucht, muss die Partie *P* alle übrigen 60 Felder des Schachbretts besuchen.

Das Feld c4 wird im gesamten Verlauf der Partie *CarCar* nur von einem einzigen Zug besucht, nämlich von dem schwarzen Bauernzug c5-c4. Also muss dieser Bauernzug in der Partie *P* vorkommen. Der ziehende sB muss zuvor im Partieverlauf nach c5 gelangen, und dafür kommt nur der Zug c7-c5 in Frage. Also enthält die Partie *P* die beiden schwarzen Bauernzüge c7-c5-c4. Durch die verkettete Notation mehrerer Züge hintereinander drücken wir aus, dass diese Zugfolge im Partieverlauf von ein und demselben Stein (hier: sB) ausgeführt wird. Die beiden Züge sind nicht auf zwei verschiedene sBB verteilt.

Auch das Feld a4 wird im Verlauf der Partie *CarCar* nur von einem einzigen Zug besucht, und zwar von sLd7-a4. Also kommt dieser Läuferzug in der Partie *P* vor. Der sL muss zuvor im Partieverlauf nach d7 gelangen, und dafür kommt nur der Zug Lc8-d7 in Frage. Bei Ausführung des Zuges Lc8-d7 darf der Original-sBd7 nicht mehr auf seinem Ursprungsfeld stehen. Der sBd7 wird nicht auf d7 geschlagen, weil im gesamten Partieverlauf von *CarCar* nur ein einziger weißer Zug auf dem Feld d7 endet, und zwar der nichtschlagende Bauernzug d6-d7. Also muss der sBd7 selbst ziehend sein Ursprungsfeld verlassen. Dies geschieht durch d7-d5. Die Partie *P* enthält somit den schwarzen Bauernzug d7-d5 und die beiden Läuferzüge Lc8-d7-a4.

Das Feld g8 wird im Verlauf von *CarCar* nur einmal besucht, und zwar durch sTh8-f8. Also kommt dieser Zug in der Partie *P* vor. Bei Ausführung des Zuges Th8-f8 dürfen die Originalfiguren sLf8 und sSg8 nicht mehr auf ihren Ursprungsfeldern stehen. Sie werden nicht geschlagen, weil kein weißer Zug in *CarCar* auf einem der beiden Felder f8, g8 endet. Also müssen die beiden Figuren selbst ziehend ihre Ursprungsfelder verlassen. Dies ist nur durch Lf8-b4 und Sg8-e7 möglich. Zur Vorbereitung dieser beiden Züge muss außerdem der Original-sBe7 sein Ursprungsfeld verlassen, und auch dieser sB kann nicht von Weiß geschlagen werden. Also enthält die Partie *P* die schwarzen Züge e7-e6, Lf8-b4, Sg8-e7 und Th8-f8.

Das Feld h7 wird im Verlauf von *CarCar* nur einmal besucht, und zwar durch sTf7-h7. Der ziehende Turm muss zuvor nach f7 gelangt sein, was nur durch Tf5-f7 möglich ist. Nach f5 ist der Turm zuvor wiederum durch Tf6-f5 gelangt, und davor nach f6 durch den Zug Tf8-f6. Wir haben in der Partie *P* also das vierzügige schwarze Turmmanöver Tf8-f6-f5-f7-h7. Zur Vorbereitung der Züge Tf8-f6 und Tf7-h7 müssen außerdem die drei schwarzen Bauern von f7, g7, h7 ihre Ursprungsfelder verlassen. Sie werden nicht von Weiß geschlagen, und deshalb müssen in der Partie *P* die drei Bauernzüge f7-f5, g7-g5 und h7-h6 vorkommen.

Das Feld b8 wird im Verlauf von *CarCar* von zwei Zügen besucht, nämlich von der Rochade sO-O-O und von sKc8-b8. Vor dem Zug sKc8-b8 müsste allerdings der sK nach c8 gelangen, was nur durch die Rochade möglich ist. Also kommt die Rochade sO-O-O in der Partie *P* vor. Zur Vorbereitung der Rochade muss der Original-sSb8 sein Ursprungsfeld verlassen, und er kann nicht von Weiß geschlagen werden. Deshalb muss in der Partie der Zug sSb8-c6 vorkommen.

Das Feld c2 wird im Verlauf von *CarCar* dreimal besucht, nämlich von den Zügen sTb2-c2, sBc3-c2 und wKd2-c2. Den beiden Zügen sBc3-c2 und wKd2-c2 ist allerdings gemeinsam, dass sie erst dann möglich werden, wenn der Original-wBc2 nicht mehr auf seinem Ursprungsfeld steht. In der Partie *CarCar* gibt es keinen weißen Bauernzug, der auf dem Feld c2 beginnt. Deshalb muss der Original-wBc2 in jedem Fall auf seinem Ursprungsfeld geschlagen werden, und dies ist nur durch sTb2xc2 möglich. Also enthält die Partie *P* den schwarzen Turmzug Tb2-c2. Der ziehende Turm muss zuvor nach b2 gelangen, was nur durch Tb4-b2 möglich ist; und zuvor muss er nach b4 durch den Zug Tb6-b4 kommen. Wir haben in der Partie *P* also das dreizügige schwarze Turmmanöver Tb6-b4-b2-c2.

Nach b6 kann der sT zuvor auf verschiedenen Wegen gelangt sein: In Frage kommen die Züge Ta6-b6, Tc6-b6 und Td6-b6. Nach a6 kommt der sT allerdings wiederum nur von b6 aus. Zwischen b6 und a6 sind (theoretisch) beliebig viele Turmpendel denkbar, aber jedenfalls muss der sT, wenn er zum ersten Mal das Feld b6 betritt, von c6 oder d6 gekommen sein. Wenn er von c6 kommt, hat er die Vorgeschichte Tf8-e8-c8-c6; und wenn er von d6 kommt, lautete sein Weg Th7-d7-d6. In der Partie *P* kommt also entweder das vierzügige Turmmanöver Tf8-e8-c8-c6-b6 oder das dreizügige Manöver Th7-d7-d6-b6 vor.

Wir haben bisher 21 schwarze Züge identifiziert, die in der Partie *P* mit Sicherheit vorkommen müssen: O-O-O, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Tb6-b4-b2-c2, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Hinzu kommen noch mindestens drei weitere Turmzüge.

### **3.3.3. Weitere schwarze Züge**

Die bisher gewonnenen Erkenntnisse gelten für alle Lösungen *P*, die die Anforderungen der Aufgabenstellung erfüllen – unabhängig von der Zügelzahl. Da wir aber insbesondere an den kürzestmöglichen Lösungen interessiert sind und mit der Partie *P\_MH* bereits eine Lösung konstruiert

haben, die mit 33,0 Zügen auskommt, setzen wir bei unseren Betrachtungen ab jetzt zusätzlich voraus, dass die Partie *P* nicht mehr als 33,0 Züge umfasst.

Das Feld g2 wird im Verlauf der Partie *CarCar* zweimal besucht: von sKh2-g2 und von sLe4-g2. Um bis nach h2 zu gelangen, würde der sK nach der Rochade allerdings mindestens zwölf Züge benötigen (Kc8-b8-c7-d7-e8-f7-g6-f5-e4-f3-f2-g1-h2). Zusammen mit den 24 Zügen, die wir bereits ermittelt haben, erhielten wir in diesem Fall bereits weit mehr als 33 Züge von Schwarz. Deshalb dürfen wir davon ausgehen, dass das Feld g2 vom weißfeldrigen sL besucht wird. Wir wissen bereits, dass dieser sL die beiden Züge Lc8-d7-a4 ausführt; jetzt kommen zusätzlich noch die sechs Züge La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2 hinzu.

Der Zug sLa4-e8 kann dabei im Partieverlauf erst nach sO-O-O ausgeführt werden. Da andererseits die Rochade wiederum durch sSb8-c6 vorbereitet wurde, findet der Zug sLa4-e8 erst nach sSb8-c6 statt. Der sS muss somit das Feld c6 vor dem Läuferzug sLa4-e8 wieder verlassen. Da Weiß im Partieverlauf nicht auf c6 schlagen kann, muss der sS selbst von c6 aus einen Zug ausführen. Dafür kommen die beiden Zugmöglichkeiten Sc6-a5 und Sc6-e7 in Frage.

Das Feld a6 wird in der Partie *CarCar* nicht von Weiß besucht, also muss es in der Partie *P* mindestens einen schwarzen Zug geben, der dieses Feld besucht. Dafür kommen grundsätzlich die beiden Züge Tb6-a6 und a7-a5 in Frage.

Als Zwischenbilanz können wir feststellen, dass wir bisher 27 schwarze Züge ermittelt haben, die in der Partie *P* zwingend vorkommen müssen (Rochade, 8xT, 9xL, 2xS, 7xB); hinzu kommen noch ein weiterer Springerzug, mindestens drei weitere Turmzüge für die Anreise nach b6 (und diese drei Turmzüge führen nicht über a6) sowie entweder Tb6-a6 oder a7-a5. Zusammen sind das mindestens 32 Züge.

Jetzt können wir den Fall ausschließen, dass der sT, der in der Partie die Wanderung Tb6-b4-b2-c2 vollführt, zuvor auf dem Weg f8-e8-c8-c6-b6 nach b6 gelangt ist. Wäre dies der Fall, so hätten wir in der Partie zwei schwarze Turmzüge, die auf dem Feld f8 starten (Tf8-f6 und Tf8-e8), also müssten auch mindestens zwei schwarze Turmzüge auf das Feld f8 führen. Die Wanderung von f8 nach b6 braucht vier Züge. Insgesamt enthielte die Partie dann bereits 34 schwarze Züge (Rochade, 13xT, 9xL, 3xS, 7xB und dazu noch einmal T oder B). Deshalb können wir feststellen, dass der sT auf dem Weg Th7-d7-d6-b6 nach b6 gelangen muss.

Jetzt kennen wir schon 30 schwarze Züge, die in der Partie *P* sicher vorkommen: O-O-O, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Th7-d7-d6-b6, Tb6-b4-b2-c2, Lc8-d7-a4-e8-h5-g6-f5-e4-g2, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Hinzu kommt ein weiterer Zug des sSc6 (Sc6-a5 oder Sc6-e7) und ein weiterer Zug, der das Feld a6 besucht (Tb6-a6 oder a7-a5).

Der einzige schwarze Turmzug, der in der Partie *CarCar* nach h7 führt, ist der Zug Tf7-h7. Wir haben weiter oben bereits festgestellt, dass dieser Zug nur zusammen mit der Wanderung Tf8-f6-f5-f7-h7 vorkommen kann. Natürlich können wir diese Wanderung in der Partie *P* nicht zweimal ausführen, weil dies viel zu viele Züge benötigen würde. Also dürfen wir die beiden ohnehin schon langen Folgen von Turmzügen aneinanderhängen: Tf8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6. Diese Wanderung wird von einem einzigen Turm ausgeführt. Außerdem macht dieser Turm im weiteren Verlauf von *P* auch noch die drei Züge Tb6-b4-b2-c2. Bisher steht noch nicht fest, ob dazwischen noch ein Pendel Tb6-a6-b6 eingeschoben wird.

Der schwarze Turm, der auf f8 die lange Wanderung bis nach c2 beginnt, kann entweder der Damenturm oder der Königsturm sein. Wenn es sich um den Damenturm handelt, so muss dieser nach der Rochade von d8 aus noch nach f8 gelangen, was einen weiteren Zug benötigt – nämlich den

Zug Td8-f8. Wenn die beschriebene Wanderung anderserseits vom Königsturm ausgeführt wird, dann hat dieser zuvor bereits sein Ursprungsfeld h8 verlassen, was (gemäß *CarCar*) nur durch Th8-f8 möglich ist. Vor diesem Zug Th8-f8 musste bereits Sg8-e7 geschehen, und damit behindert der Se7 den späteren Turmzug Th7-d7. Da Weiß im Partieverlauf nicht auf e7 schlagen kann, muss der sS das Feld e7 selbst ziehend wieder verlassen. Dafür kommen die beiden Zugmöglichkeiten Se7-f5 und Se7-g6 in Frage.

Damit haben wir nachgewiesen, dass Schwarz in der Partie *P* auf jeden Fall mindestens 33 Züge benötigt. Die Partie *P\_MH* ist mit ihren 33,0 Zügen also tatsächlich eine Lösung mit minimaler Zügezahl.

### **3.4. Folgerungen**

Der Besuch auf dem Feld a6 kann nun nicht mehr durch Tb6-a6 erfolgen, weil dieser Turm einen zusätzlichen Zug bräuchte, um nach b6 zurückzukehren und von dort aus seine Wanderung bis nach c2 fortzusetzen – dann hätte die Partie bereits 34 schwarze Züge. Also muss das Feld a6 durch den Zug a7-a5 besucht werden. Wir listen nochmals die 33 schwarzen Züge auf, die in der Partie *P* vorkommen müssen:

O-O-O, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2-c2, Lc8-d7-a4-e8-h5-g6-f5-e4-g2, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7, a7-a5, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6,

dazu einmal Sc6-a5 oder Sc6-e7

sowie einmal Td8-f8 oder Se7-f5 oder Se7-g6.

Mit dem letztgenannten Zug (T oder S) ist eine Fallunterscheidung verbunden: Wenn der Zug Td8-f8 vorkommt, dann wandert der schwarze Damenturm nach c2 (und umgekehrt). Wenn andererseits einer der beiden Züge Se7-f5, Se7-g6 vorkommt, dann wandert der schwarze Königsturm nach c2 (und umgekehrt). Außerdem können die Züge Se7-f5, Se7-g6 (wenn sie überhaupt vorkommen) nur vom Königsspringer ausgeführt werden, d.h. die Wanderung Sb8-c6-e7-f5/g6 ist nicht möglich.

Aus unseren gewonnenen Erkenntnissen über die schwarzen Züge folgt insbesondere auch, dass die sD in der Partie *P* überhaupt nicht ziehen darf. Andererseits kann die sD zum Zeitpunkt der Rochade sO-O-O natürlich nicht mehr auf ihrem Ursprungsfeld d8 stehen, d.h. die sD wird auf d8 geschlagen. Für einen Schlag auf d8 steht für Weiß aus der Partie *CarCar* nur der Zug Lh4-d8 zur Verfügung (der Bauernzug d7-d8=D erfolgt selbstverständlich nichtschlagend). Also muss der Zug wLh4-d8 in der Partie *P* vorkommen. Um die Rochade zu ermöglichen, muss der wL außerdem nach dem Schlag auf d8 dieses Feld wieder verlassen – und er muss selbst ziehen, weil unter den 33 schwarzen Zügen offenbar keiner ist, der auf d8 schlagen könnte. Für die Räumung des Feldes d8 steht dem wL aus der Partie *CarCar* nur der Zug Ld8-a5 zur Verfügung. Also kommt auch dieser Zug (übrigens der letzte Zug von *CarCar*) in der Partie *P* vor. Da es in der Partie *CarCar* außerdem keinen weißen Läuferzug gibt, der auf a5 beginnt, muss der wL in der Partie *P* auf dem Feld a5 unbeweglich verharren – entweder bis zum Ende der Partie oder bis er geschlagen wird. Ein Schlag des wLa5 durch Schwarz ist (gemäß dem Vorrat an schwarzen Zügen für die Partie *P*, den wir bereits ermittelt haben) nur durch Sc6-a5 möglich. Falls dieser Schlag in der Partie *P* vorkommt, müsste wiederum der sS auf dem Feld a5 bis zum Ende der Partie verharren – denn Weiß verfügt aus der Partie *CarCar* über keinen weiteren Zug, in dem er nochmals auf a5 schlagen könnte, und Schwarz hat in der Partie *P* keinen Springerzug, der auf a5 beginnt. Damit haben wir nachgewiesen, dass nach dem Zug wLd8-a5 bis zum Ende der Partie *P* auf dem Feld a5 immer eine Figur steht (wL oder sS). Der Bauernzug a7-a5 kann damit im Partieverlauf von *P* nur vor dem Zug wLd8-a5 stattfinden; und da der sB selbst nicht weiterzieht und

auch nicht auf andere Art von Weiß auf a5 geschlagen werden kann, schlägt der wL somit auf a5 den sB.

Wir wissen bereits, dass der Original-wBc2 im Partieverlauf nicht zieht und auf seinem Ursprungsfeld durch sTb2xc2 geschlagen wird. Darüber hinaus können wir nun auch feststellen, dass der Original-wBb2 nicht zieht – denn gemäß *CarCar* könnte dies nur durch den Schlag b2xc3 geschehen, aber Schwarz bringt in seinen sämtlichen 33 Zügen keinen Stein nach c3, der dort als Schlagopfer dienen könnte. Also wird der Original-wBb2 auf seinem Ursprungsfeld durch sTb4xb2 geschlagen.

Wir haben hergeleitet, dass es einen sT gibt, der in der Partie *P* eine 10-zügige Wanderung von f8 bis nach c2 vollführt. Unterwegs macht der sT einen Zwischenstopp auf dem Feld b4. Bereits bevor die Turmwanderung auf dem Feld f8 beginnt, muss der sLf8 sein Ursprungsfeld durch den Zug Lf8-b4 verlassen haben. Danach führt dieser sL in der Partie *P* keinen weiteren Zug mehr aus. Also muss der sL auf dem Feld b4 geschlagen werden, bevor der Zug sTb6-b4 erfolgen kann. Für den Schlag des sL auf b4 kommen aus der Partie *CarCar* nur die beiden weißen Bauernzüge a3xb4 und c3xb4 in Frage. Im Fall von c3xb4 müsste der schlagende wB allerdings zuvor durch b2-c3 auf das Feld c3 gelangt sein, was nicht geht (wie wir bereits gesehen haben). Also kann der Schlag auf b4 nur durch a3-b4 geschehen; dieser Bauernzug muss in der Partie *P* vorkommen. Nach a3 gelangt der wB zuvor durch den Zug a2-a3.

In der Partie *P* kommt der Bauernzug f7-f5 vor, und erst danach ist sTf8-f6 möglich. Für den späteren Turmzug sTf6-f5 muss der sB von dem Feld f5 wieder verschwinden, was allerdings nicht durch einen Zug dieses sB geschieht. Also muss der sB von Weiß geschlagen werden. Für diesen Schlag kommen aus der Partie *CarCar* zwei Züge in Frage: Entweder wLg4-f5 oder (wie in *CarCar* selbst) der Enpassant-Schlag e5-f6.

### **3.5. Minimale Zügezahl für 59 Besuche**

#### **3.5.1. Schwarze Züge**

Wir wollen nun im Hinblick auf das sekundäre Kriterium des Wettbewerbs untersuchen, in welcher minimalen Zügezahl es innerhalb einer beliebigen 33-zügigen Lösung *P* möglich ist, die ersten 59 Felder des Schachbretts zu besuchen. Den Anfangsabschnitt der Partie *P*, in dem 59 Felder besucht werden, bezeichnen wir mit *P'*. Mit der o.g. Lösung *P\_MH* kennen wir bereits ein Beispiel einer Partie, in der der Besuch der ersten 59 Felder in 27,5 Zügen gelingt. Wir dürfen uns deshalb darauf beschränken, solche Partien *P* zu betrachten, für die der Anfangsabschnitt *P'* höchstens 27,5 Züge umfasst.

Welches kann das letzte (60.) Feld sein, das im Verlauf von *P* besucht wird? Der Besuch dieses Feldes erfolgt natürlich im letzten (33.) Zug von Schwarz. Die Rochade ist nicht der letzte Zug von Schwarz, weil danach noch der Zug sLa4-e8 geschieht. Aus dem gleichen Grund ist auch der zweite Zug des Damenspringers (Sc6-a5 oder Sc6-e7) nicht der letzte Zug. Der Zug Lf8-b4 ist nicht der letzte Zug, weil danach noch der Schlag a3xb4 erfolgt, und ebenso ist a7-a5 nicht der letzte Zug, weil danach noch wLd8xa5 geschieht. Der Zug Sg8-e7 ist nicht der letzte Zug, weil danach Th8-f8 erfolgt; und wenn der Königsspringer in der Partie *P* noch einen zweiten Zug macht (Se7-f5 oder Se7-g6), so geschieht danach noch sTh7-d7. Nach d7-d5 kommt noch Lc8-d7; nach e7-e6 haben wir Lf8-b4; und nach den drei Zügen f7-f5, g7-g5 und h7-h6 erfolgt noch der Turmzug Tf7-h7. Damit bleiben für den letzten Zug der Partie *P* nur noch vier Kandidaten übrig: Th8-f8, Tb2-c2, Le4-g2 und c5-c4.

Im Zug Th8-f8 wird das Feld g8 erstmals besucht; im Zug Tb2-c2 das Feld c2; im Zug Le4-g2 das Feld g2; und im Zug c5-c4 das Feld c4. Das letzte (60.) Feld, das in der Partie *P* besucht wird, ist also auf jeden Fall eines der vier Felder c2, g2, c4, g8. Alle übrigen 56 Felder (natürlich außer a7, b7, a8, h8) müssen mit Sicherheit bereits im Partieabschnitt *P'* besucht werden.

Insbesondere wird das Feld b2 in *P'* besucht. Da der Original-wBb2 auf seinem Ursprungsfeld geschlagen wird (durch sTb4xb2), muss der Zug sTb4-b2 der erste sein, der im Partieverlauf von *P* das Feld b2 besucht. Damit gehört die neunzügige Turmwanderung sTf8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2 zwingend zum Partieabschnitt *P'*. Um diese Turmwanderung zu ermöglichen, benötigen wir in *P'* auch die Züge d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5 und h7-h6, hinzu kommen der Vorgängerzug des sT nach f8 (entweder Td8-f8 oder Th8-f8) und der Läuferzug Lf8-b4, um diesen Vorgängerzug zu ermöglichen. Weiterhin muss *P'* das Feld b8 besuchen, so dass auch die Rochade sO-O-O in *P'* vorkommen muss. Zur Vorbereitung der Rochade benötigen wir sSb8-c6 und auch die Bauernzüge c7-c5 und a7-a5 (weil bereits vor der sO-O-O der weiße Läuferzug Ld8xa5 geschieht). Auch das Feld a4 muss besucht werden, wofür die Züge Lc8-d7-a4 erforderlich sind. Damit haben wir 21 schwarze Züge exakt identifiziert, die im Partieabschnitt *P'* vorkommen müssen, und noch einen weiteren Turmzug (Td8-f8 oder Th8-f8).

Wäre nun nicht g2 das letzte Feld, das im Partieverlauf von *P* besucht wird, so müsste in *P'* auch dieses Feld erreicht werden, was allerdings die sechszügige Läuferwanderung La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2 erfordern würde. Dann hätten wir in *P'* bereits mindestens 28 schwarze Züge – und das sind zu viele. Also können wir schließen, dass das 60. besuchte Feld im Verlauf der Partie *P* das Feld g2 sein muss. Im Partieabschnitt *P'* werden somit auch noch die drei Felder c2, c4, g8 besucht. Dazu sind die schwarzen Züge Tb2-c2, c5-c4 und Th8-f8 erforderlich, sowie zur Vorbereitung von Th8-f8 auch Sg8-e7. Damit kennen wir nun bereits 25 schwarze Züge, die in *P'* vorkommen müssen.

Im Partieabschnitt *P'* muss auch das Feld e8 besucht werden. Da es in der Partie *CarCar* keinen weißen Zug gibt, der e8 besucht, muss dies von Schwarz erledigt werden. Aus dem bereits bekannten Zügevorrat für die Partie *P* kommen dafür nur die Züge La4-e8 und Td8-f8 in Frage.

Wir sind nun in der Lage, den Fall auszuschließen, dass die Turmwanderung nach c2 in der Partie *P* vom schwarzen Königsturm ausgeführt wird: Angenommen, der Original-sTh8 würde nach c2 wandern. Dann wissen wir bereits, dass der Königsspringer nach Sg8-e7 noch einen zweiten Zug benötigen würde und dass deshalb der Turmzug Td8-f8 nicht in der Partie *P* vorkommen könnte. Um im Partieabschnitt *P'* das Feld e8 zu besuchen, benötigten wir dann den Zug La4-e8, und zu dessen Vorbereitung müsste außerdem der Damenspringer das Feld c6 räumen (Sc6-a5 oder Sc6-e7). Weiterhin müsste aber auch der Königsspringer seinen zweiten Zug (Se7-f5 oder Se7-g6) bereits im Partieabschnitt *P'* ausführen, um den Turmzug Th7-d7 zu ermöglichen. Damit würde der Partieabschnitt *P'* dann bereits mindestens 28 Züge umfassen – Widerspruch.

Wir wissen nun also, dass die Turmwanderung nach c2 in der Partie *P* vom Damenturm durchgeführt wird: Nach der Rochade O-O-O erfolgt Td8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2-c2. Der Königsspringer macht in der Partie *P* nach Sg8-e7 keinen zweiten Zug mehr. Da Weiß mit dem Zugmaterial aus *CarCar* nicht auf e7 schlagen kann, bleibt der sS nach Sg8-e7 also bis zum Ende der Partie *P* auf dem Feld e7 stehen. Für den Damenspringer können wir nun den Zug Sc6-e7 ausschließen – denn auch dieser Springer müsste ja danach bis zum Ende von *P* auf diesem Feld verharren. Also haben wir nun auch noch die letzten beiden schwarzen Züge für die Partie *P* exakt ermittelt, für die es bisher noch mehrere Möglichkeiten gab: Sie lauten Td8-f8 und Sc6-a5.

Für den Partieabschnitt *P'* benötigen wir natürlich den Zug Td8-f8, um die lange Turmwanderung einzuleiten. Außerdem muss aber auch der Springerzug Sc6-a5 bereits in *P'* stattfinden, denn der sS

gelangt vor der sO-O-O nach c6, also auch vor Beginn der Turmwanderung; und auf c6 stünde er dann dem Turmzug Td6-b6 im Weg.

Damit haben wir 27 schwarze Züge ermittelt, die im Partieabschnitt  $P'$  vorkommen müssen:

O-O-O, Td8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2-c2, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sb8-c6-a5, Sg8-e7, a7-a5, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6.

Der Partieabschnitt  $P'$  umfasst also mindestens 27,0 Züge. Es ist noch unklar, ob 27,0 Züge ausreichen oder ob es 27,5 Züge sein müssen. In der Schlussphase der Partie nach dem Abschnitt  $P'$  absolviert Schwarz mit seinen letzten sechs verbliebenen Zügen die Läuferwanderung La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2.

### 3.5.2. Weiße Züge

Nun sehen wir uns an, welche weißen Züge in der Partiephase  $P'$  zwingend erforderlich sind. Wir dürfen davon ausgehen, dass es höchstens 28 Züge sind. Vier Züge kennen wir bereits: a2-a3-b4 (zur Vorbereitung von sTb6-b4) und Lh4-d8-a5 (zur Vorbereitung von sO-O-O). Damit der wL nach h4 gelangt, benötigt er ferner die drei Züge Lc1-e3-g5-h4; und zur Ermöglichung von Lc1-e3 muss außerdem der wBd2 ziehen (Schwarz schlägt in  $P'$  nicht auf d2), d.h. wir haben den Zug d2-d4.

Das Feld f2 wird von Schwarz in  $P'$  nicht besucht, also muss Weiß dies erledigen; und dafür kommt aus *CarCar* nur der Zug Kg3-f2 in Frage. Um nach g3 zu gelangen, benötigt der wK zuvor die Rochade O-O und danach die beiden Züge Kg1-h2-g3. Zur Ermöglichung der Wanderung Kg1-h2-g3-f2 müssen die beiden wBB von f2 und h2 ihre Ursprungsfelder räumen (Schwarz schlägt nicht auf f2 oder h2), d.h. es sind die Züge f2-f3 und h2-h4 erforderlich. Als Vorbereitung für die Rochade müssen Lf1 und Sg1 ihre Ursprungsfelder räumen (wieder schlägt Schwarz nicht), und dies ist nur mit den beiden Zügen Lf1-d3 und Sg1-f3 möglich. Zur Vorbereitung von Lf1-d3 muss sich weiterhin der wBe2 bewegen (Schwarz schlägt nicht), d.h. wir haben auch den Zug e2-e4.

Das Feld h1 wird im Partieverlauf von *CarCar* nur durch den Zug wTb1-h1 besucht, also muss auch dieser Zug in  $P'$  vorkommen. Bei Ausführung dieses Zuges Tb1-h1 müssen die Felder b1 und d1 von ihren Originalfiguren geräumt sein, wofür wir die Züge Sb1-c3 und Dd1-g4 benötigen (Schwarz schlägt nicht auf b1 oder d1). Außerdem findet der Zug Tb1-h1 im Partieverlauf natürlich erst nach der Rochade wO-O statt, und deshalb muss der Königsturm nach der Rochade das Feld f1 räumen. Dies ist nur durch Tf1-e1 möglich, also kommt auch dieser Zug in  $P'$  vor.

Das Feld a1 wird im Partieverlauf von *CarCar* nur durch den Zug wTe1-a1 besucht, also muss auch dieser Zug in  $P'$  vorkommen.

Als Zwischenbilanz können wir festhalten, dass wir bisher 22 weiße Züge exakt kennen, die im Partieabschnitt  $P'$  enthalten sein müssen:

O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Tf1-e1, Tb1-h1, Te1-a1, Lc1-e3-g5-h4-d8-a5, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3-b4, d2-d4, e2-e4, f2-f3, h2-h4.

Darüber hinaus benötigen wir als Vorbereitung von Tb1-h1 mindestens einen Zug, durch den ein wT nach b1 gelangt. Hierfür gibt es gemäß *CarCar* die vier Möglichkeiten Ta1-b1, Te1-b1, Th1-b1 und Tb2-b1.

Sowohl durch Sg1-f3 als auch durch f2-f3 betritt jeweils ein weißer Stein das Feld f3. Schwarz schlägt im Verlauf von  $P'$  nicht auf diesem Feld. Also muss der erste weiße Stein dieses Feld wieder räumen, bevor der zweite weiße Stein dorthin gelangen kann. Hierfür wird in  $P'$  ein zusätzlicher Zug benötigt.

Wenn f2-f3 vor Sg1-f3 geschieht, muss der zusätzliche Zug f3-f4 sein. Wenn andererseits Sg1-f3 vor f2-f3 geschieht, bestehen für den zusätzlichen Zug die beiden Möglichkeiten Sf3-d2 und Sf3-g5.

Das Feld a2 wird im im Verlauf von  $P'$  nicht von Schwarz besucht, also muss Weiß dies erledigen. Grundsätzlich stehen ihm dafür gemäß *CarCar* die beiden Züge Kb2-a2 und Ta1-a2 zur Verfügung. Im Fall von Kb2-a2 würde der wK allerdings für die Wanderung von f2 nach a2 fünf Züge benötigen (Kf2-e3-d2-c1-b2-a2), und dann ergäbe die Gesamtzählung der bisherigen Resultate bereits mindestens 29 weiße Züge in der Partiephase  $P'$ . Also können wir schließen, dass in  $P'$  der Zug wTa1-a2 vorkommen muss. Wir kennen damit bereits 23 weiße Züge für  $P'$  exakt, und hinzu kommen noch ein weiterer Turmzug (nach b1) und ein weiterer Zug, der von S oder B ausgeführt wird und auf dem Feld f3 beginnt.

Wir wissen, dass nach dem schwarzen Zug f7-f5 der sB von Weiß geschlagen werden muss, um den Turmzug sTf6-f5 zu ermöglichen. Dieser Schlag muss innerhalb der Partiephase  $P'$  erfolgen, und er geschieht entweder durch e5xf6 (e.p.) oder durch Lg4xf5. Um nach g4 zu gelangen, würde der wL allerdings nach Lf1-d3 noch die weiteren Züge Ld3-e2-h5-g4 benötigen, und dann hätten wir in der Partiephase  $P'$  wieder mindestens 29 Züge von Weiß. Also können wir schließen, dass für den Schlag des sB der Bauernzug e5-f6 erforderlich ist. Damit der wB zuvor nach e5 gelangt, benötigen wir außerdem den Zug e4-e5. Damit haben wir für  $P'$  nun bereits 25 weiße Züge exakt ermittelt sowie zwei weitere von T, S, B.

Das Feld h5 wird in der Partiephase  $P'$  nicht von Schwarz besucht, also benötigen wir hierfür einen weißen Zug. Gemäß *CarCar* kommen dafür die Züge Le2-h5 und h4-h5 in Frage. Für Le2-h5 wäre jedoch zur Vorbereitung noch Ld3-e2 erforderlich, und dann kämen wir wieder auf 29 weiße Züge in  $P'$ . Also können wir schließen, dass das Feld h5 durch den Zug h4-h5 erreicht werden muss.

Jetzt kennen wir 26 weiße Züge für die Partiephase  $P'$  exakt, dazu noch einen Turmzug und einen Zug von S oder B. Wir können also feststellen, dass die Partiephase  $P'$  mindestens 28 weiße Züge umfassen muss, d.h. für den Besuch der ersten 59 Felder benötigen wir in der Partie  $P$  genau 27,5 Züge.

### **3.6. Folgerungen**

Für den weißen Turmzug nach b1 (zur Vorbereitung von Tb1-h1) haben wir oben noch vier Möglichkeiten aufgezählt: Ta1-b1, Te1-b1, Th1-b1 und Tb2-b1. Dies können wir nun weiter präzisieren: Wenn der Turm von e1 käme, so hätten wir in  $P'$  zwei weiße Turmzüge, die auf e1 beginnen (Te1-a1 und Te1-b1), also müsste auch zuvor zweimal ein wT nach e1 ziehen – was aber nicht der Fall ist. Wenn der Turm von h1 käme, so müsste er zuvor nach h1 gezogen sein (denn der Original-Th1 verlässt sein Ursprungsfeld ja durch die Rochade), und dann hätten wir neben dem Zug Tb1-h1 (der im Partieverlauf erst nach dem hier betrachteten Turmzug nach b1 kommt) noch einen weiteren Turmzug, der auf h1 endet – was wieder nicht der Fall ist. Schließlich bräuchten wir im Fall von Tb2-b1 zuvor einen Turmzug, der auf b2 endet, und auch dies ist nicht der Fall. Also können wir schließen, dass der wT, der den Zug Tb1-h1 ausführt, zuvor durch Ta1-b1 nach b1 gekommen sein muss.

Der wT, der den Zug Te1-a1 ausführt, muss zuvor nach e1 gekommen sein, und das ist nur durch Tf1-e1 möglich; und dieser Zug wird vom Königsturm nach der Rochade ausgeführt. Bevor der Königsturm nach a1 zieht, muss der Damenturm dieses Feld räumen (Schwarz schlägt nicht auf a1). Dafür kommen die beiden Züge Ta1-a2 und Ta1-b1 in Frage. Verließe der Damenturm allerdings das Feld a1 durch Ta1-b1, so müsste er zur Ermöglichung von Te1-a1 auch noch das Feld b1 vorher

verlassen, und das wäre dann nur durch Tb1-h1 möglich – doch der Königsturm hält sich vor dem Zug Te1-a1 immer auf einem der drei Felder h1, f1, e1 auf, was den Zug Tb1-h1 verhindert. Also können wir schließen, dass der Damenturm das Feld a1 durch Ta1-a2 verlässt und danach auf dem Feld a2 verbleibt. Der Königsturm vollführt nach der Rochade das vierzügige Manöver Tf1-e1-a1-b1-h1.

Wir kennen jetzt bereits 27 weiße Züge exakt, die im Partieabschnitt  $P'$  vorkommen müssen. Auch der letzte verbleibende weiße Zug (im Abschnitt  $P'$ ) lässt sich nun noch herleiten. Wir wissen, dass es sich um einen der drei Züge f3-f4, Sf3-d2, Sf3-g5 handeln muss. Wir betrachten die Stellung nach dem 28. Zug von Weiß: Der wK steht auf f2, und der schwarze Damenturm ist nach der Rochade von d8 aus in elf Zügen bis nach c2 gewandert. Auf c2 ist der sT nicht geschlagen worden, weil keiner der 28 weißen Züge von  $P'$  auf diesem Feld endet. Also steht der sT noch auf c2. Da der wKf2 nach dem 28. Zug von Weiß nicht im Schach des sTc2 stehen darf, benötigen wir auf einem der beiden Felder d2, e2 einen Stein als Schachschutz. Aber keiner der 27 schwarzen Züge von  $P'$  endet auf einem dieser beiden Felder; die beiden weißen Original-Bauern von d2 und e2 haben ihre Ursprungsfelder ziehend verlassen; und von den 28 weißen Zügen des Partieabschnitts  $P'$  endet ebenfalls keiner auf d2 oder e2 – mit der einzigen Ausnahme Sf3-d2. Also muss im Partieabschnitt  $P'$  der Zug wSf3-d2 vorkommen.

Abgesehen von der Zugreihenfolge haben wir damit nun alle 55 Einzelzüge des Partieabschnitts  $P'$  komplett identifiziert. Es sind die folgenden Züge:

Weiß: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2, Tf1-e1-a1-b1-h1, Lc1-e3-g5-h4-d8-a5, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3-d2, a2-a3-b4, d2-d4, e2-e4-e5-f6, f2-f3, h2-h4-h5;

Schwarz: O-O-O, Td8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2-c2, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sb8-c6-a5, Sg8-e7, a7-a5, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6.

Einige dieser 55 Einzelzüge sind mit einem Schlagfall verbunden: Der wL schlägt auf d8 die sD und auf a5 den schwarzen a-Bauern. Der weiße a-Bauer schlägt auf b4 den schwarzen Königsläufer. Der weiße e-Bauer schlägt en passant auf f6 den schwarzen f-Bauern. Der schwarze Königsturm schlägt auf seiner elfzügigen Wanderung von d8 nach c2 nacheinander vier weiße Bauern:

- Der Zug Tf8-f6 ist im Partieverlauf erst nach f7-f5 möglich; als unmittelbare Antwort auf f7-f5 muss e5xf6 e.p. geschehen; und der wBf6 macht danach keinen weiteren Zug (und Schwarz betritt das Feld f6 nicht mit einem anderen Stein als dem Turm). Also wird im Zug Tf8-f6 der weiße e-Bauer geschlagen.
- Der Zug Tb6-b4 ist im Partieverlauf erst nach Lf8-b4 möglich, und um dem Turm den Zutritt zu b4 zu ermöglichen, hat Weiß den sL durch a3xb4 geschlagen. Da der wB danach das Feld b4 nicht mehr ziehend verlässt und Schwarz es auch nicht mit einem anderen Stein betritt, wird im Zug Tb6-b4 der weiße a-Bauer geschlagen.
- Die beiden weißen Bauern von b2 und c2 verlassen im Partieverlauf nicht ihre Ursprungsfelder. Schwarz betritt diese beiden Felder nur mit dem Turm. Also werden die beiden Bauern in den Zügen Tb4-b2 und Tb2-c2 geschlagen.

Schließlich haben wir auch noch einen zweiten Schlag auf dem Feld a5: Wir wissen bereits, dass der wL auf a5 den schwarzen a-Bauern schlägt und dass der wL danach auf a5 verharrt – entweder bis zum Partieende oder bis er selbst geschlagen wird. Würde der sS vor dem sB nach a5 gelangen, so könnte er dieses Feld nicht mehr ziehend verlassen, es gäbe aber auch keinen weiteren Zug, in dem Weiß das Feld a5 betritt und damit den sS schlagen könnte. Der sS würde dann den Bauernzug a7-a5 verhindern. Nach a7-a5 verhindert der sB wiederum selbst den Springerzug Sc6-a5, bis Weiß auf a5 geschlagen hat. Also gelangt der sS erst nach dem wL nach a5 und schlägt somit auf a5 diesen wL.

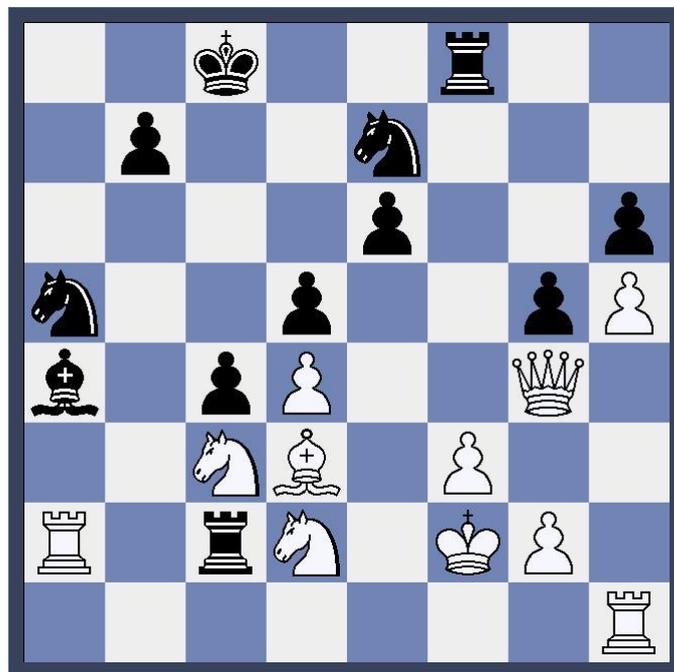
Wir kennen nun also neun Schläge, die im Verlauf des Partieabschnitts  $P'$  vorkommen. Geschlagen werden der weiße Damenläufer (auf a5), die weißen a-, b-, c- und e- Bauern (auf b4, b2, c2, f6), die schwarze Dame (auf d8), der schwarze Königsläufer (auf b4), der schwarze a-Bauer (auf a5) und der schwarze f-Bauer (auf f6, en passant). Wir wollen nun noch prüfen, ob im Partieabschnitt  $P'$  weitere Schlagfälle auftreten können. Zu diesem Zweck betrachten wir die Zielfelder der 11 weißen und 12 schwarzen Steine, die nicht bereits gemäß den vorigen Überlegungen geschlagen werden. Wir notieren jeweils das letzte Feld, das der betreffende Stein durch seine Zugfolge im Verlauf des Partieabschnitts  $P'$  erreicht:

Weiß: Kf2, Dg4, Ta2, Th1, Ld3, Sc3, Sd2, Bd4, f3, g2, h5

Schwarz: Kc8, Tc2, Tf8, La4, Sa5, Se7, Bb7, c4, d5, e6, g5, h6

Wie sich anhand der Liste der Züge des Partieabschnitts  $P'$  leicht nachprüfen lässt, betritt im Verlauf von  $P'$  kein schwarzer Stein eines der elf Felder f2, g4, a2, h1, d3, c3, d2, d4, f3, g2, h5. Also wird keiner der 11 verbliebenen weißen Steine geschlagen. Umgekehrt betritt auch kein weißer Stein eines der zwölf Felder c8, c2, f8, a4, a5, e7, b7, c4, d5, e6, g5, h6 – mit Ausnahme der beiden Züge Le3-g5 und Ld8-a5. Dass der wL auf dem Feld a5 nicht den sS schlägt (sondern vielmehr einen sB), haben wir weiter oben bereits festgestellt. Über die relative Reihenfolge der beiden Züge wLe3-g5 und sBg7-g5 im Partieverlauf haben wir allerdings bisher noch keine Erkenntnisse gewonnen. Falls wLe3-g5 vor sBg7-g5 geschieht, so steht der sBg5 zum Abschluss des Partieabschnitts  $P'$  noch auf dem Brett. Falls andererseits sBg7-g5 vor wLe3-g5 geschieht, so wird der sB auf dem Feld g5 vom wL geschlagen.

Bis auf dieses Detail (sBg5) ist die Stellung nach dem 28. Zug von Weiß nun aber jedenfalls bekannt:



Der sBg5 dürfte im Diagramm auch fehlen.

### 3.7. Nachgelagerte Wettbewerbskriterien

Zur Untersuchung der nachgelagerten Stufen des sekundären Kriteriums der Aufgabenstellung (geringstmögliche Zügezahl für den Besuch von 58, 57,... Feldern) führen wir nun eine abkürzende

Schreibweise ein: Unter  $z(n)$  verstehen wir die Anzahl von Zügen, die in einer optimalen Partie benötigt werden, um die ersten  $n$  Felder zu besuchen. Ein „Zug“ besteht dabei aus zwei Halb- bzw. Einzelzügen, d.h.  $z(n)$  ist stets ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5. Wir haben bereits hergeleitet, dass  $z(60) = 33,0$  und  $z(59) = 27,5$  gilt. Aufgrund des Beispiels der Partie  $P_{MH}$ , in der das 60./59./58. Feld jeweils nach 33,0/27,5/27,0 Zügen erreicht wird, kennen wir auch schon eine Obergrenze für  $z(58)$ : Es muss  $z(58) \leq 27,0$  gelten. Über die weiteren Werte  $z(n)$  für  $n < 58$  haben wir zum jetzigen Zeitpunkt der Untersuchung noch keine gesicherten Erkenntnisse – außer, dass natürlich ganz allgemein stets  $z(n) \leq z(n+1)$  gelten muss. Direkt aus den Schachregeln folgt  $z(0) = 0,0$  und  $z(1) = 0,5$ .

Ausgehend von der obigen Diagrammstellung werden wir uns nun schrittweise rückwärts durch die Partie  $P$  bis zur Partieanfangsstellung hindurchhangeln und dabei sukzessive die Zügezahlen  $z(58)$ ,  $z(57)$ ,  $z(56)$ ,... bestimmen. Dabei wird sich herausstellen, dass die Partie  $P_{MH}$  für alle  $n = 0, \dots, 60$  das  $n$ -te Feld im  $z(n)$ -ten Zug besucht – was wiederum bedeutet, dass die Partie eine optimale Lösung der Aufgabenstellung darstellt.

Wenn wir im Rahmen der Rückwärtsanalyse einen Zug zurücknehmen, der in der Vorwärtsbetrachtung im Verlauf der Partie  $P$  ein Feld zum ersten Mal besucht, so verwenden wir hierfür die Sprechweise, dass der Zug das betreffende Feld „verliert“. Ein Zug, der kein Feld verliert, wird als „Freizug“ bezeichnet.

In der Diagrammstellung hat Weiß zuletzt gezogen. Wir untersuchen, welches der letzte (28.) Zug von Weiß gewesen sein kann. Der Zug  $Ta1-a2$  kann nicht zurückgenommen werden, weil nach  $Ta1-a2$  im Partieverlauf noch  $wTe1-a1$  geschieht. Der Zug  $Sb1-c3$  kann ebenfalls nicht zurückgenommen werden, weil danach noch  $wTe1-a1$  und  $wTa1-b1$  erfolgen. Auch  $Lf1-d3$  kann nicht zurückgenommen werden, weil der  $wL$  auf dem Feld  $f1$  die späteren Züge  $wO-O$  und  $wTb1-h1$  verhindern würde. Damit bestehen für Weiß in der Diagrammstellung nur drei Möglichkeiten, einen Zug des Partieabschnitts  $P'$  zurückzunehmen:  $Kg3-f2$ ,  $Tb1-h1$  und  $h4-h5$ . Jeder dieser drei Züge verliert ein Feld ( $f2$ ,  $h1$  bzw.  $h5$ ). Der Zug 28.  $Tb1-h1$  verliert darüber hinaus keine weiteren Felder, denn die Felder  $c1$ ,  $d1$  werden im Partieverlauf zuvor bereits durch  $wTe1-a1$  besucht, das Feld  $e1$  durch  $wTf1-e1$  und die Felder  $f1$ ,  $g1$  durch  $wO-O$ .

Jeder der drei Züge  $Kg3-f2$ ,  $Tb1-h1$  und  $h4-h5$  verliert also im 28. Zug von Weiß genau ein Feld und ist damit noch mit den Anforderungen  $z(59) = 27,5$  und  $z(58) \leq 27,0$  vereinbar. Bei der weiteren Rückwärtsanalyse ist jede dieser drei Zugmöglichkeiten in Betracht zu ziehen, d.h. es bestehen (vorläufig) drei gleichwertige Varianten.

Jetzt wenden wir uns der Stellung vor dem 28. Zug von Weiß zu – also vor 28.  $Kg3-f2$  oder 28.  $Tb1-h1$  oder 28.  $h4-h5$ . Welche Möglichkeiten bestehen nun für Schwarz, um einen Zug zurückzunehmen?

- Der Läuferzug  $Ld7-a4$  ist nicht möglich, weil der  $sL$  das Feld  $d7$  im Partieverlauf bereits vor der Rochade  $sO-O-O$  durch  $sLc8-d7$  erreicht und der Damenturm sich erst nach der Rochade auf seine elfzügige Wanderung bis nach  $c2$  begibt – zu der insbesondere auch der Zug  $Th7-d7$  gehört. Der Zug  $sTh7-d7$  findet damit in der Partie später statt als  $sLd7-a4$ .
- Der Springerzug  $Sc6xLa5$  ist nicht möglich, weil der  $wL$  im Partieverlauf bereits vor der Rochade  $sO-O-O$  durch  $wLd8xa5$  nach  $a5$  gelangt und danach im Partieabschnitt zwischen den beiden Zügen  $wLd8xa5$  und  $sO-O-O$  kein Stein auf einem der beiden Felder  $b6$  oder  $c7$  stehen kann – der Original- $sBc7$  hat sein Ursprungsfeld ja bereits für  $wLd8xa5$  geräumt, und der Zug  $sTd6-b6$  des schwarzen Damenturms kann erst nach  $sO-O-O$  geschehen. Damit muss der  $wL$  bereits vor  $sO-O-O$  durch den Zug  $sSc6xa5$  geschlagen werden, um nicht das Feld  $d8$  zu beobachten und die Rochade zu verhindern.

- Der Springerzug Sg8-e7 ist nicht möglich, weil nach Sg8-e7 im Partieverlauf noch sTh8-f8 geschieht.
- Der Bauernzug d7-d5 ist nicht möglich, weil danach noch sLc8-d7 und sTh7-d7 kommen.
- Auch die beiden Bauernzüge g7-g5 und h7-h6 stehen nicht zur Verfügung, weil danach noch sTf7-h7 geschieht.

Damit bleiben für Schwarz nur drei Möglichkeiten übrig, um im 27. Zug einen Zug zurückzunehmen: Tb2xc2, Th8-f8 und c5-c4. Jeder dieser drei Züge verliert ein Feld (c2, g8 bzw. c4). Der Zug Th8-f8 verliert darüber hinaus kein weiteres Feld, weil f8 im Partieverlauf zuvor bereits durch sTd8-f8 besucht wird.

Somit verliert jeder drei drei Züge Tb2xc2, Th8-f8 und c5-c4 im 27. Zug von Schwarz genau ein Feld. Daraus folgt nun  $z(58) = 27,0$  und  $z(57) \leq 26,5$ . Anhand der Partie *P\_MH* erkennen wir, dass sogar  $z(57) \leq 25,0$  gelten muss. Jeder der drei Züge 27... Tb2xc2, 27... Th8-f8, 27... c5-c4 ist in der weiteren Rückwärtsanalyse in Betracht zu ziehen; es bestehen drei gleichwertige Varianten für den 27. Zug von Schwarz. In Verbindung mit den drei Möglichkeiten für den 28. Zug von Weiß führt dies auf insgesamt neun Varianten, wobei die weißen und die schwarzen Züge einander aber in dieser Partiephase offenbar nicht beeinflussen.

Wegen  $z(57) \leq 25,0$  benötigen wir im 27. Zug von Weiß nun einen Freizug, also einen Zug, der kein Feld verliert. Im Fall von 28. h4-h5 bestehen im 27. Zug von Weiß aber nur die beiden Zugmöglichkeiten Kg3-f2 und Tb1-h1 (nicht h2-h4, weil danach im Partieverlauf noch wKg1-h2 erfolgen muss), die beide jeweils ein Feld verlieren. Die Variante 28. h4-h5 können wir damit aus der weiteren Untersuchung ausschließen, sie ist nicht mit einer optimalen Lösung vereinbar. Im Fall von 28. Kg3-f2 bestehen im 27. Zug von Weiß die Möglichkeiten Kh2-g3, Tb1-h1 und h4-h5, die alle ein Feld verlieren, und darüber hinaus noch f2-f3. Dieser Zug f2-f3 ist ein Freizug, weil das Feld f3 bereits früher im Partieverlauf von wDd1-g4 und von wSg1-f3 besucht wird. Die Variante 27. f2-f3 28. Kg3-f2 kommt damit für eine optimale Lösung weiterhin in Betracht. Im Fall von 28. Tb1-h1 bestehen schließlich im 27. Zug von Weiß die Möglichkeiten Kg3-f2 und h4-h5, die beide ein Feld verlieren, und darüber hinaus Ta1-b1. Dieser Zug ist ein Freizug, weil das Feld b1 bereits früher im Partieverlauf von wTe1-a1 besucht wird. Auch die Variante 27. Ta1-b1 28. Tb1-h1 kommt also weiterhin in Betracht.

Für den 27. und 28. Zug von Weiß bestehen damit noch zwei mögliche Varianten: entweder 27. f2-f3 28. Kg3-f2 oder 27. Ta1-b1 28. Tb1-h1.

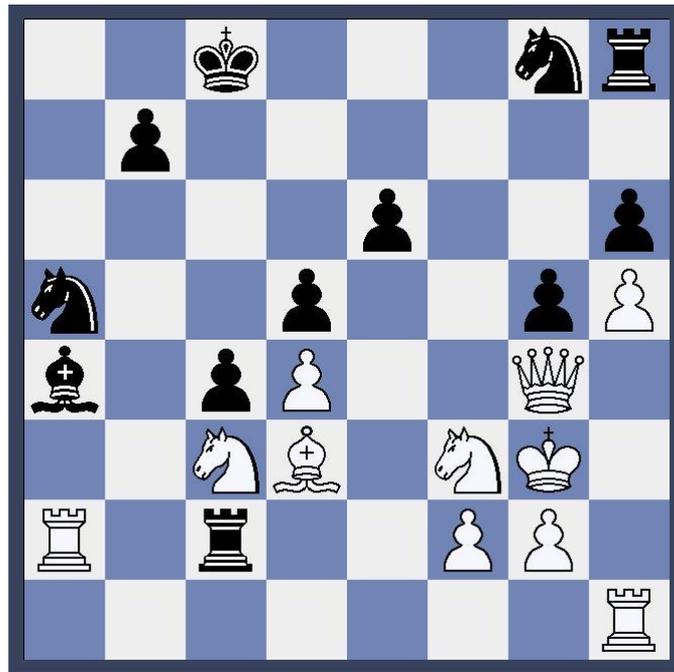
Auch im 26. Zug von Schwarz benötigen wir einen Freizug, um nicht in einen Konflikt mit  $z(57) \leq 25,0$  zu geraten. Im Fall von 27... Tb2xc2 bestehen im 26. Zug allerdings nur die Möglichkeiten Tb4xb2, Th8-f8 und c5-c4, die alle mindestens ein Feld verlieren. Und auch im Fall von 27... c5-c4 gibt es nur Möglichkeiten, die ein Feld verlieren, nämlich Tb2xc2 und Th8-f8; die Rücknahme 26... c7-c5 ist nicht möglich, weil danach im Partieverlauf noch wLd8xa5 geschehen muss. Auf der Suche nach einem Freizug im 26. Zug von Schwarz dürfen wir uns damit auf die Variante 27... Th8-f8 beschränken. Hier bestehen die Zugmöglichkeiten Tb2xc2 und c5-c4, die jeweils ein Feld verlieren, und darüber hinaus noch Sg8-e7. Dieser Zug ist ein Freizug, weil das Feld e7 im Partieverlauf früher bereits von sLf8-b4, wLh4xd8 und sTh7-d7 besucht wird.

Im 26. und 27. Zug von Schwarz gibt es damit keine Wahlmöglichkeit mehr: In jeder optimalen Partie müssen die Züge 26... Sg8-e7 und 27... Th8-f8 vorkommen.

Wegen  $z(57) \leq 25,0$  benötigen wir auch im 26. Zug von Weiß nun einen Freizug. In der Variante 27. Ta1-b1 28. Tb1-h1 steht ein solcher Freizug nicht zur Verfügung – die einzigen Zugmöglichkeiten für Weiß wären Kg3-f2, Te1-a1 und h4-h5, die alle mindestens ein Feld verlieren. Also bleibt nur die

Variante 27. f2-f3 28. Kg3-f2 übrig. Hier haben wir im 26. Zug von Weiß die Möglichkeiten Kh2-g3, Tb1-h1 und h4-h5, die alle ein Feld verlieren, und darüber hinaus noch Sf3-d2. Die Rücknahme Dd1-g4 ist nicht möglich, weil danach im Partieverlauf noch wTe1-a1 und wTb1-h1 geschehen muss. Der Zug 26. Sf3-d2 ist nun aber tatsächlich ein Freizug, weil das Feld d2 zuvor bereits durch wLc1-e3 besucht wird.

Damit haben wir hergeleitet, dass die letzten fünf Einzelzüge, die zur obigen Diagrammstellung geführt haben, eindeutig feststehen. Es handelt sich um die Züge 26. Sf3-d2 Sg8-e7 27. f2-f3 Th8-f8 28. Kg3-f2. Unmittelbar davor, also nach dem 25. Zug von Schwarz, entsteht die folgende Stellung:



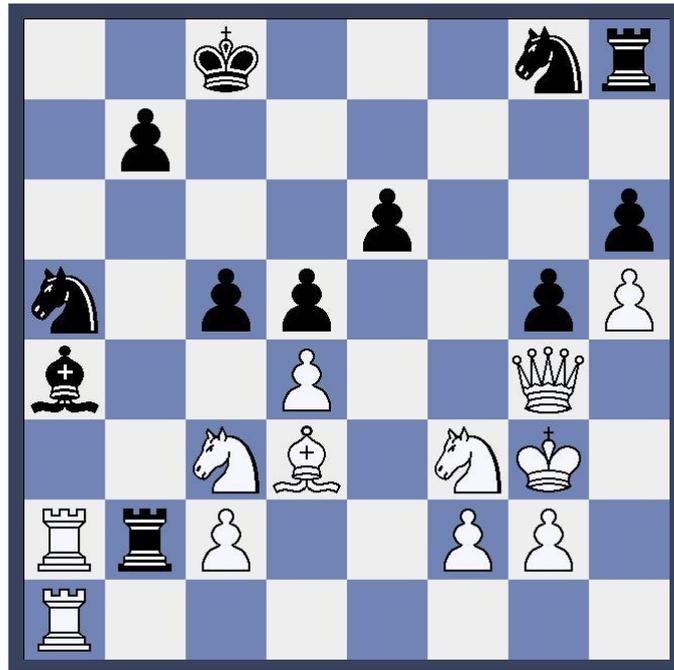
Der sBg5 dürfte im Diagramm auch fehlen.

Im 25. Zug hat Schwarz nun zwei Möglichkeiten, einen Zug zurückzunehmen: Tb2xc2 und c5-c4. Der Bauernzug e7-e6 ist nicht möglich, weil danach im Partieverlauf noch sLf8-b4, wLh4-d8 und sTh7-d7 geschehen müssen. Jeder der beiden Züge Tb2xc2 und c5-c4 verliert genau ein Feld. Daraus folgt nun  $z(57) = 25,0$  und  $z(56) \leq 24,5$ . In der weiteren Betrachtung sind beide Varianten 25... Tb2xc2 und 25... c5-c4 im Auge zu behalten.

Im 25. Zug von Weiß bestehen die drei Möglichkeiten Kh2-g3, Tb1-h1 und h4-h5. Der Springerzug Sg1-f3 ist nicht möglich, weil danach im Partieverlauf noch wO-O und wTb1-h1 erfolgen. Jede der drei Zugmöglichkeiten Kh2-g3, Tb1-h1 und h4-h5 verliert genau ein Feld. Es folgt  $z(56) = 24,5$  und  $z(55) \leq 24,0$ . In der weiteren Betrachtung sind die drei Varianten 25. Kh2-g3, 25. Tb1-h1 und 25. h4-h5 zu untersuchen.

Im 24. Zug von Schwarz bestehen im Fall von 25... Tb2xc2 die beiden Möglichkeiten Tb4xb2 und c5-c4. Beide verlieren mindestens ein Feld. Im Fall von 25... c5-c4 gibt es im 24. Zug nur die einzige Zugmöglichkeit Tb2xc2 (nicht c7-c5 wegen des späteren wLd8xa5), die ebenfalls ein Feld verliert. Daraus folgt  $z(55) = 24,0$ . Anhand des Beispiels der Partie *P\_MH* erkennen wir  $z(54) \leq 23,0$ . Da der Zug sTb4xb2 mit b3 und b2 gleich zwei Felder verlöre, ist die Variante 24... Tb4xb2 25... Tb2xc2 somit nicht mit einer optimalen Lösung vereinbar. Für den 24. und 25. Zug von Schwarz bestehen nur noch zwei Möglichkeiten: entweder 24... c5-c4 25... Tb2xc2 oder 24... Tb2xc2 25... c5-c4. Diese beiden Varianten sind Zugumstellungen voneinander, sie sind offenbar gleichwertig und führen im Rückwärtsspiel zum gleichen Ergebnis.

Wegen  $z(54) \leq 23,0$  benötigen wir im 24. Zug von Weiß nun einen Freizug. Im Fall von 25. Kh2-g3 steht ein solcher Freizug allerdings nicht zur Verfügung, weil jede der beiden Zugmöglichkeiten Tb1-h1 und h4-h5 ein Feld verliert (natürlich geht nicht 24. Kg1-h2, weil nach Kg1-h2 noch wTb1-h1 geschehen müsste). Auch im Fall von 25. h4-h5 gibt es im 24. Zug von Weiß keinen Freizug, weil die beiden Zugmöglichkeiten Kh2-g3 und Tb1-h1 jeweils ein Feld verlieren. Damit bleibt nur noch die Variante 25. Tb1-h1 zu betrachten. Im 24. Zug verlieren dann Kh2-g3 und h4-h5 jeweils ein Feld, aber mit 24. Ta1-b1 steht tatsächlich ein Freizug zur Verfügung. Der 24. und 25. Zug von Weiß sind damit eindeutig festgelegt. Insgesamt haben wir im Rückwärtsspiel weitere vier Einzelzüge indentifiziert, die (diesmal bis auf eine eventuelle Vertauschung der Reihenfolge der beiden schwarzen Züge) eindeutig sind. Wir erhalten die folgende Stellung nach dem 23. Zug von Schwarz:



Der sBg5 dürfte im Diagramm auch fehlen.

Im 23. Zug hat Schwarz nun nur eine einzige Möglichkeit, einen Zug zurückzunehmen: 23... Tb4xb2. Auch im weiteren Rückwärtsspiel werden wir es in der Analyse jetzt mit mehreren Stellungen zu tun bekommen, in denen für Schwarz bei der Rücknahme keine Auswahl besteht. Der Zug 23... Tb4xb2 verliert die beiden Felder b3 und b2, so dass wir  $z(54) = 23,0$ ,  $z(53) = 23,0$  und  $z(52) \leq 22,5$  erhalten.

Im 23. Zug von Weiß gibt es grundsätzlich drei Möglichkeiten, einen Zug zurückzunehmen: Kh2-g3, Te1-a1 und h4-h5. Die Züge Kh2-g3 und h4-h5 verlieren jeweils genau ein Feld, während es bei Te1-a1 gleich vier Felder auf einen Schlag wären – dieser Turmzug kommt deshalb an dieser Stelle für die Rücknahme innerhalb einer optimalen Partie nicht in Betracht. Es bleiben die beiden Varianten 23. Kh2-g3 und 23. h4-h5, und es folgt  $z(52) = 22,5$ . Das Beispiel der Partie *P\_MH* liefert jetzt außerdem die Obergrenze  $z(51) \leq 20,5$ .

Schwarz kann im 22. Zug nur 22... Tb6xb4 zurücknehmen; dies ist ein Freizug, weil das Feld b5 bereits vorher im Partieverlauf durch sLd7-a4 besucht wird und das Feld b4 durch die beiden Züge sLf8-b4 und a3xb4.

Wegen  $z(51) \leq 20,5$  benötigen wir auch im 22. Zug von Weiß einen Freizug, und das muss nun 22. a3xb4 sein – ansonsten bestehen nämlich im Fall von 23. Kh2-g3 nur die Zugmöglichkeiten Kg1-h2, Te1-a1 und h4-h5 und im Fall von 23. h4-h5 nur die Möglichkeiten Kh2-g3 und Te1-a1, welche

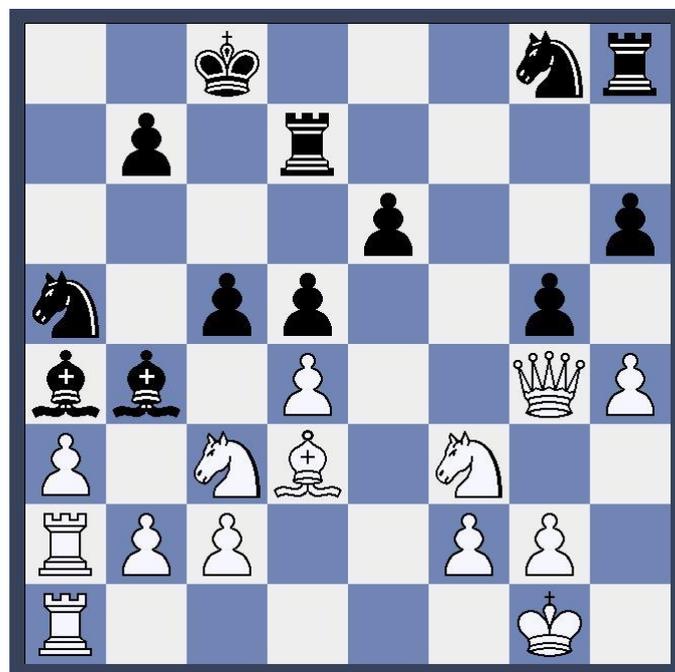
sämtlich jeweils mindestens ein Feld verlieren. Also kommt in jeder optimalen Partie der Zug 22. a3xLb4 vor.

Schwarz verfügt im 21. Zug über die einzige Möglichkeit 21... Td6-b6; und dieser Zug ist wieder ein Freizug, weil das Feld c6 bereits vorher von sLd7-a4, c7-c5 und sSb8-c6 besucht wird und das Feld b6 von wLd8xa5.

Im 21. Zug von Weiß gibt es nun mehrere Varianten: Im Fall von 23. Kh2-g3 bestehen grundsätzlich die Zugmöglichkeiten Kg1-h2, Te1-a1 und h4-h5; und im Fall von 23. h4-h5 gibt es die Möglichkeiten Kh2-g3 und Te1-a1. Der Zug Te1-a1 scheidet nun wieder aus, weil er zu viele Felder verliert. Es bleiben drei Varianten übrig: 21. Kg1-h2 23. Kh2-g3, 21. h4-h5 23. Kh2-g3 und 21. Kh2-g3 23. h4-h5. Die letzten beiden dieser Varianten sind Zugumstellungen voneinander. In jedem Fall verliert der 21. Zug von Weiß genau ein Feld. Es ergibt sich somit  $z(51) = 20,5$ . Das Beispiel der Partie *P\_MH* zeigt außerdem  $z(50) \leq 19,5$ .

Auch im 20. Zug verfügt Schwarz wieder nur über die einzige Möglichkeit 20... Td7-d6, und dieser Zug ist ein Freizug (wegen sLf8-b4 und d7-d5).

Im 20. Zug von Weiß bestehen in der Variante 21. Kg1-h2 23. Kh2-g3 die beiden Zugmöglichkeiten Te1-a1 und h4-h5; in der Variante 21. h4-h5 23. Kh2-g3 und ebenso in der Zugumstellung 21. Kh2-g3 23. h4-h5 sind es die Zugmöglichkeiten Kg1-h2 und Te1-a1. Der Zug Te1-a1 scheidet wieder aus, weil er zu viele Felder verliert. Damit bleiben nur die drei Varianten 20. h4-h5 21. Kg1-h2 23. Kh2-g3, 20. Kg1-h2 21. h4-h5 23. Kh2-g3 und 20. Kg1-h2 21. Kh2-g3 23. h4-h5 übrig. Alle diese Varianten sind Zugumstellungen voneinander, so dass im Rückwärtsspiel wieder eine einheitliche Stellung nach dem 19. Zug von Schwarz entsteht. Da der 20. Zug von Weiß jeweils ein Feld verliert, erhalten wir  $z(50) = 19,5$ . Das Beispiel der Partie *P\_MH* führt auf  $z(49) \leq 18,5$ . Wir halten die Stellung nach dem 19. Zug von Schwarz wieder im Diagramm fest.



Der sBg5 dürfte im Diagramm auch fehlen.

Vorläufig zum letzten Mal haben wir es in der Rückwärtsanalyse auch im 19. Zug von Schwarz mit nur einer einzigen Zugmöglichkeit zu tun: 19... Th7-d7. Dieser Zug ist ein Freizug, weil das Feld g7 im

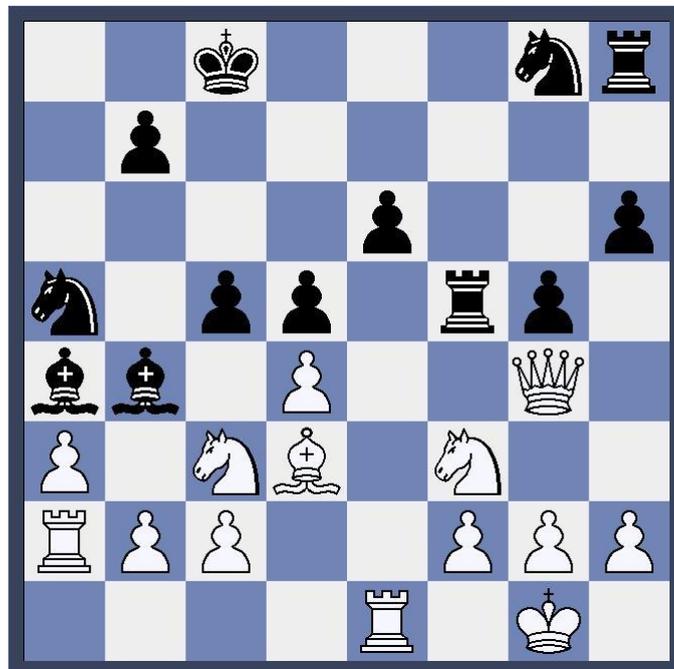
Partieverlauf zuvor durch sTf7-h7 besucht wird, das Feld f7 durch sTf8-f6 und sTf6-f7, das Feld e7 durch sLf8-b4 und wLh4xd8 und das Feld d7 schließlich durch sLc8-d7.

Weiß verfügt im 19. Zug grundsätzlich über die beiden Möglichkeiten Te1-a1 und h2-h4, von denen allerdings der Zug Te1-a1 vier Felder verliert und deshalb im Rückwärtsspiel weiter zurückzustellen ist. Der Zug h2-h4 verliert nur das Feld h3 – das Feld h4 wird im Partieverlauf bereits früher durch wLg5-h4 besucht. Also haben wir in der Partie den Zug 19. h2-h4, und es folgt  $z(49) = 18,5$  und  $z(48) \leq 18,0$ .

Im 18. Zug von Schwarz gibt es nun zwei Möglichkeiten: Tf7-h7 und Ld7-a4. Der Turmzug verliert die beiden Felder g7 und h7, und der Läuferzug verliert die beiden Felder b5 und a4 (nicht c6, weil dieses Feld vorher im Partieverlauf von c7-c5 und sSb8-c6 besucht wird). Es folgt  $z(48) = 18,0$ ,  $z(47) = 18,0$  und  $z(46) \leq 17,5$ . In der weiteren Untersuchung sind die beiden Varianten 18... Tf7-h7 und 18... Ld7-a4 zu beachten.

Im 18. Zug verfügt Weiß jetzt nur über eine Zugmöglichkeit: 18. Te1-a1. Dieser Zug verliert vier Felder, so dass wir  $z(46) = z(45) = z(44) = z(43) = 17,5$  und  $z(42) \leq 17,0$  erhalten.

Im 17. Zug von Schwarz besteht in der Variante 18... Ld7-a4 die einzige Zugmöglichkeit Tf7-h7, die zwei Felder verliert. In der anderen Variante 18... Tf7-h7 gibt es hingegen vier Zugmöglichkeiten: Ld7-a4 verliert zwei Felder, g7-g5 verliert das Feld g6 (aber nicht g5, weil die Züge wLe3-g5 und wLh4xd8 früher im Partieverlauf erfolgen) und h7-h6 verliert das Feld h6. Die vierte Zugmöglichkeit Tf5-f7 ist ein Freizug, da das Feld f6 im Partieverlauf bereits vorher von den Zügen wLh4xd8, f7-f5, e5xf6 und sTf8xf6 besucht wird und das Feld f7 vom Zug sTf8xf6. Im Vergleich setzt sich diese Variante damit durch: In einer optimalen Partie müssen die schwarzen Züge 17... Tf5-f7 und 18... Tf7-h7 vorkommen. Daraus folgt  $z(42) \leq 16,5$ . Insgesamt haben wir in der Partie fünf aufeinanderfolgende Einzelzüge exakt identifiziert: 17... Tf5-f7 18. Te1-a1 Tf7-h7 19. h2-h4 Th7-d7. Wir erhalten die folgende Stellung nach dem 17. Zug von Weiß:



Der sBg5 dürfte im Diagramm auch fehlen.

Im 17. Zug verfügt Weiß nun über die drei Zugmöglichkeiten Ta1-a2, Tf1-e1 und Sb1-c3. Jeder dieser drei Züge verliert genau ein Feld. Wir erhalten somit  $z(42) = 16,5$  und  $z(41) \leq 16,0$ . In der weiteren Analyse sind die drei gleichberechtigten Varianten 17. Ta1-a2, 17. Tf1-e1 und 17. Sb1-c3 zu beachten.

Im 16. Zug von Schwarz haben wir die vier Möglichkeiten Tf6-f5, Ld7-a4, g7-g5 und h7-h6. Darunter ist allerdings Tf6-f5 der einzige Freizug (das Feld f5 wird früher im Partieverlauf von f7-f5 erledigt), deshalb muss in einer optimalen Lösung der Zug 16... Tf6-f5 vorkommen. Es ergibt sich  $z(41) \leq 15,5$ .

Weiß stehen im 16. Zug nun von den drei Zugmöglichkeiten Ta1-a2, Tf1-e1 und Sb1-c3 erneut die beiden zur Verfügung, die nicht im 17. Zug zurückgenommen wurden. Im Fall von 17. Ta1-a2 kommt zusätzlich noch die Möglichkeit a2-a3 hinzu, die ebenfalls genau ein Feld verliert. Im Fall von 17. Tf1-e1 wäre zwar auch die Rochade wO-O grundsätzlich möglich; aber da dieser Zug zwei Felder verlöre, brauchen wir ihn an dieser Stelle nicht zu beachten. Wir können also schließen, dass Weiß im 16. und 17. Zug insgesamt zwei der vier Züge Ta1-a2, Tf1-e1, Sb1-c3 und a2-a3 zurücknimmt. In jedem Fall verliert der 16. Zug ein Feld, und wir erhalten  $z(41) = 15,5$  und  $z(40) \leq 15,0$ .

Schwarz hat im 15. Zug nun wieder vier Zugmöglichkeiten zur Auswahl: Tf8xBf6, Ld7-a4, g7-g5 und h7-h6. Der Zug Ld7-a4 verliert zwei Felder, während jeder der drei anderen Züge jeweils genau ein Feld verliert (Tf8xf6 verliert das Feld f7, während f6 im Partieverlauf bereits früher von wLh4xd8, f7-f5 und e5xf6 besucht wird). Es sind also zunächst die drei Varianten Tf8xf6, g7-g5 und h7-h6 zu betrachten; wir erhalten  $z(40) = 15,0$  und  $z(39) \leq 14,5$ . Allerdings hat der Zug Tf8xf6 gegenüber den beiden Alternativen g7-g5 und h7-h6 einen entscheidenden Vorteil: Durch den Entschlag eines wBf6 erhält Weiß im 15. Zug den Freizug e5xf6. Dies ist die einzige Möglichkeit für einen Freizug im 15. Zug von Weiß. Also müssen in in einer optimalen Partie die beiden Züge 15. e5xf6 Tf8xf6 vorkommen. Damit der En-passant-Schlag 15. e5xf6 legal ist, muss außerdem unmittelbar vorher in der Partie 14... f7-f5 geschehen. Der Zug 14... f7-f5 verliert das Feld f5, aber nicht f6 (wegen wLh4xd8). Es folgt  $z(39) = 14,0$  und  $z(38) \leq 13,5$ .

Wir haben in der Partie also die drei aufeinanderfolgenden Einzelzüge 14... f7-f5 15. e5xf6 Tf8xf6 identifiziert. Im 14. Zug von Weiß bestehen nun wieder (wie bereits im 16. und 17. Zug) mehrere Zugmöglichkeiten, die alle jeweils genau ein Feld verlieren: Erstens alle von den drei Zügen Ta1-a2, Tf1-e1 und Sb1-c3, die nicht schon im 16. oder 17. Zug zurückgenommen wurden (mindestens einer), zweitens ggf. der Zug a2-a3 (falls im 16. oder 17. Zug Ta1-a2 dabei ist), und drittens jetzt auch noch zusätzlich e4-e5. Die Rochade O-O scheidet wieder aus. Weiß nimmt also einen Zug zurück, der genau ein Feld verliert. Im 14., 16. und 17. Zug werden insgesamt drei der fünf Züge Ta1-a2, Tf1-e1, Sb1-c3, a2-a3 und e4-e5 zurückgenommen. Es ergibt sich  $z(38) = 13,5$  und  $z(37) \leq 13,0$ .

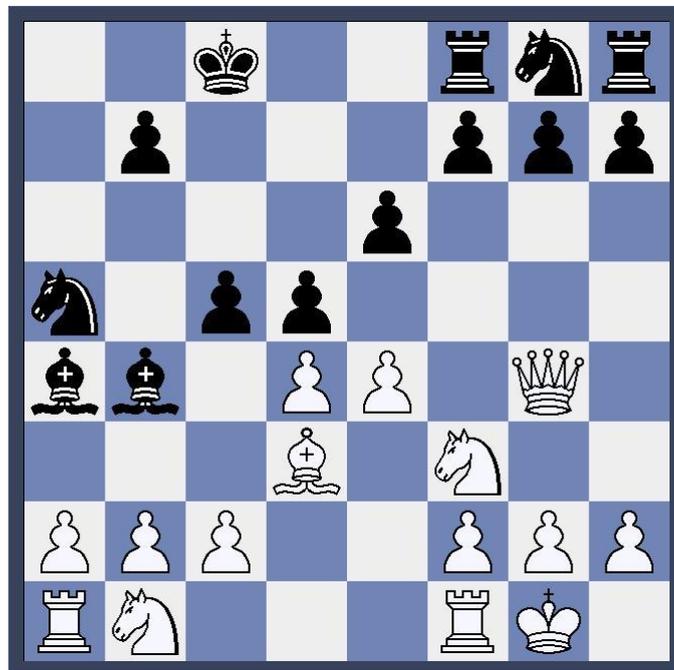
Im 13. Zug von Schwarz bestehen nun die vier Möglichkeiten Td8-f8, Ld7-a4, g7-g5 und h7-h6. Die ersten beiden davon verlieren jeweils zwei Felder, während die beiden Bauernzüge nur jeweils ein Feld verlieren. Also nimmt Schwarz im 13. Zug einen der beiden Züge g7-g5 und h7-h6 zurück. Wir erhalten  $z(37) = 13,0$  und  $z(36) \leq 12,5$ .

Im 13. Zug von Weiß ist von den vier Zügen Ta1-a2, Tf1-e1, Sb1-c3, e4-e5 immer noch mindestens einer übrig, der nicht in den Zügen Nr. 14, 16, 17 zurückgenommen wurde. Falls Ta1-a2 bereits zurückgenommen wurde, kommt als weitere Möglichkeit a2-a3 hinzu. Der Bauernzug e2-e4 (der im Fall von 14. e4-e5 grundsätzlich in Erwägung zu ziehen ist) kommt nicht in Frage, weil danach im Partieverlauf noch wDd1-g4 und wLf1-d3 geschehen müssen. Die Rochade dürfen wir wieder ausschließen. Weiß nimmt also im 13. Zug einen der fünf Züge Ta1-a2, Tf1-e1, Sb1-c3, e4-e5, a2-a3 zurück und verliert damit wieder genau ein Feld. Im 13., 14., 16. und 17. Zug wurden insgesamt vier der genannten fünf Züge zurückgenommen. Da a2-a3 nicht ohne Ta1-a2 zurückgenommen werden kann, muss letzterer Zug Ta1-a2 offenbar bereits dabei gewesen sein, d.h. wir können neu

formulieren: Im 13., 14., 16. und 17. Zug wurde der Zug Ta1-a2 zurückgenommen und dazu noch drei der vier Züge Tf1-e1, Sb1-c3, a2-a3, e4-e5. Es ergibt sich  $z(36) = 12,5$  und  $z(35) \leq 12,0$ .

Im 12. Zug von Schwarz gibt es drei Zugmöglichkeiten, unter denen aber nur eine ist, die nur ein einziges Feld verliert. Im Fall 13... g7-g5 handelt es sich dabei um den Zug h7-h6, im Fall 13... h7-h6 analog um g7-g5. Wir können also feststellen, dass der 12. und 13. Zug von Schwarz bis auf Zugumstellung feststehen: Schwarz spielt in beliebiger Reihenfolge die beiden Bauernzüge g7-g5 und h7-h6. Wir erhalten  $z(35) = 12,0$  und  $z(34) \leq 11,5$ . Außerdem können wir nun festhalten, dass im Partieverlauf von  $P$  der schwarze Bauernzug g7-g5 später stattfinden muss als der weiße Läuferzug wLe3-g5. In allen bisherigen Diagrammen ist der sBg5 damit zu Recht abgebildet.

Im 12. Zug von Weiß wäre es nun naheliegend, auch noch den letzten verbliebenen der vier Züge Tf1-e1, Sb1-c3, a2-a3, e4-e5 zurückzunehmen – schließlich handelt es sich dabei um die einzige Möglichkeit, nur ein Feld zu verlieren. Würden wir dies so umsetzen, so wären die weißen und schwarzen Manöver im 12.-17. bis auf Zugumstellung eindeutig und wir erhielten die folgende Stellung nach dem 11. Zug von Schwarz (Analysediagramm):

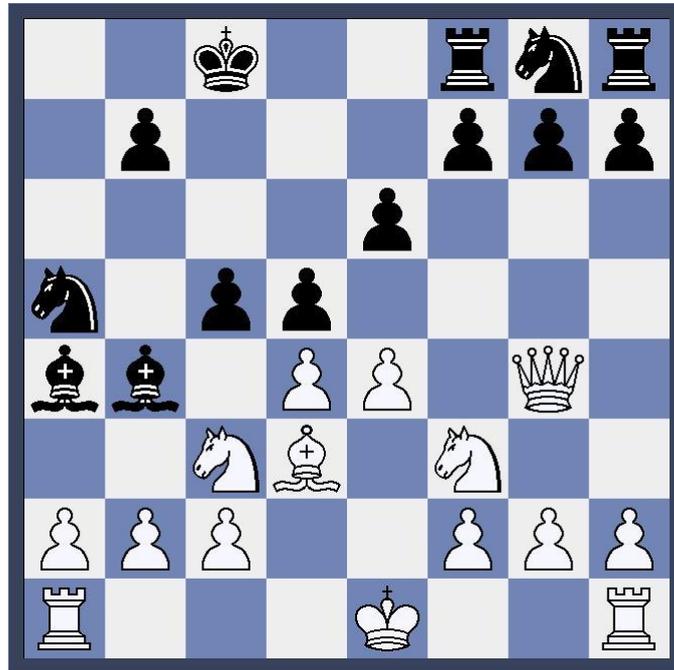


In dieser Stellung hätte Schwarz zuletzt gezogen, und dafür kämen die Züge Td8-f8 und Ld7-a4 in Frage. Doch unmittelbar davor (d.h. im 11. Zug von Weiß) geriete Weiß nun in Zugnot – es gäbe aus dem Vorrat an Zügen für den Partieabschnitt  $P'$  keinen verfügbaren Kandidaten mehr, den Weiß zurücknehmen könnte. Insbesondere scheidet die Rochade wO-O aus, weil dann der wK unmittelbar vor der Rochade im Schach des sLb4 gestanden hätte.

Dieser Widerspruch zeigt, dass es im 12. Zug von Weiß nicht möglich ist, den letzten verbliebenen der vier Züge Tf1-e1, Sb1-c3, a2-a3 und e4-e5 zurückzunehmen. Wir benötigen im 12. Zug von Weiß einen anderen Zug, d.h. wir müssen im Analysediagramm gedanklich einen der vier genannten Züge wieder vorwärts ausführen (quasi eine Rücknahme der Rücknahme) und statt dessen einen anderen Zug zurücknehmen. Dies gelingt nur auf eine einzige Weise: Wir müssen den wSb1 wieder nach c3 transferieren und sind dann in der Lage, die Rochade wO-O zurückzunehmen.

Weiß muss also in den Zügen Nr. 13, 14, 16 und 17 genau die vier Züge Ta1-a2, Tf1-e1, a2-a3 und e4-e5 zurücknehmen. Die Reihenfolge dieser vier Züge ist grundsätzlich frei, wobei allerdings zwei Nebenbedingungen zu beachten sind: a2-a3 findet im Partieverlauf vor Ta1-a2 statt, und e4-e5 muss

im Partieverlauf vor 15. e5xf6 erfolgen, d.h. entweder im 13. oder im 14. Zug. Im 12. Zug findet die weiße Rochade 12. O-O statt; sie verliert zwei Felder. Es ergibt sich  $z(34) = 11,5$ ,  $z(33) = 11,5$  und  $z(32) \leq 11,0$ . Nach dem 11. Zug von Schwarz erhalten wir die folgende Stellung:



Im 11. Zug hat Schwarz die beiden Möglichkeiten Td8-f8 und Ld7-a4. Jeder dieser beiden Züge verliert zwei Felder. Wir erhalten deshalb  $z(32) = 11,0$ ,  $z(31) = 11,0$  und  $z(30) \leq 10,5$ . In der weiteren Betrachtung sind die beiden Varianten 11... Td8-f8 und 11... Ld7-a4 zu berücksichtigen.

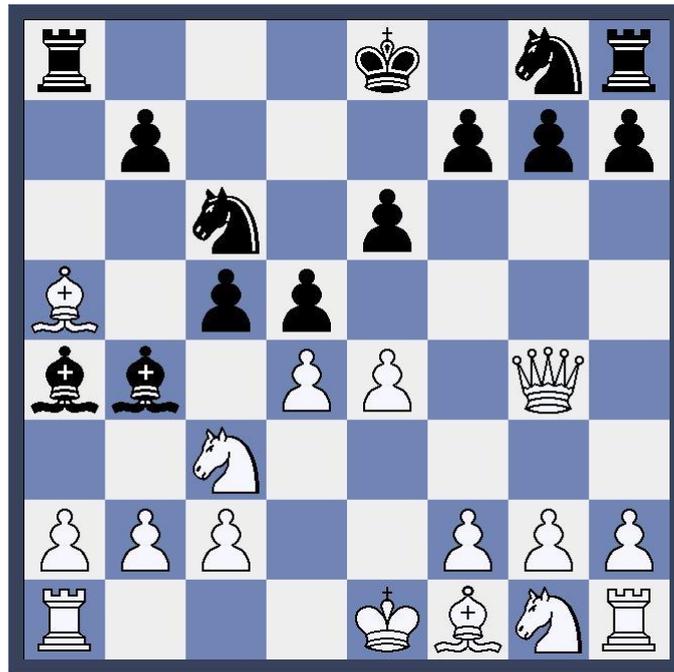
Weiß kann im 11. Zug nicht den Springerzug Sb1-c3 zurücknehmen, weil Schwarz im weiteren Rückwärtsspiel das Schach gegen den wK nicht aufheben könnte. Für Weiß bestehen die beiden Zugmöglichkeiten Lf1-d3 und Sg1-f3, und jeder dieser beiden Züge ist ein Freizug (die Felder e2 und f3 werden zuvor von wDd1-g4 besucht und das Feld d3 von d2-d4). Es ergibt sich  $z(30) \leq 10,0$ , und wir haben die beiden Varianten 11. Lf1-d3 und 11. Sg1-f3.

Im 10. Zug hat Schwarz im Fall von 11... Ld7-a4 als einzige Möglichkeit den Zug Td8-f8; im Fall von 11... Td8-f8 ist analog Ld7-a4 möglich, aber zusätzlich auch noch die Rochade O-O-O. Die beiden Züge Td8-f8 und Ld7-a4 verlieren jeweils zwei Felder, und dies trifft auch auf die Rochade zu: Sie verliert b8 und c8, aber nicht d8 (wegen wLh4xd8). Also folgt  $z(30) = 10,0$ ,  $z(29) = 10,0$  und  $z(28) \leq 9,5$ ; für den 10. und 11. Zug von Schwarz gibt es insgesamt die drei Varianten 10... Td8-f8 11... Ld7-a4, 10... Ld7-a4 11... Td8-f8 und 10... O-O-O 11... Td8-f8.

Im 10. Zug von Weiß ist im Fall von 11. Lf1-d3 nicht der Bauernzug d2-d4 möglich, weil danach im Partieverlauf noch wLc1-e3 geschieht; es bleibt deshalb nur der Freizug Sg1-f3 übrig. Im Fall von 11. Sg1-f3 ist der Damenzug Dd1-g4 zwar grundsätzlich möglich, aber er verliert zwei Felder (f3 und g4), weshalb er im Vergleich mit dem Freizug Lf1-d3 ausscheidet. Daraus folgt, dass der 10. und 11. Zug von Weiß bis auf die Reihenfolge feststehen: Es müssen in jedem Fall die beiden Freizüge Lf1-d3 und Sg1-f3 geschehen. Weiterhin ergibt sich  $z(28) \leq 9,0$ .

Schwarz steht im 9. Zug im Fall der beiden Varianten 10... Td8-f8 11... Ld7-a4 und 10... Ld7-a4 11... Td8-f8 ausschließlich die Rochade O-O-O zur Verfügung, die zwei Felder verliert. In der dritten Variante 10... O-O-O 11... Td8-f8 gibt es den analogen Zug Ld7-a4, der zwei Felder verliert – aber zusätzlich auch noch den Freizug Sc6xLa5 (das Feld a5 wird im Partieverlauf vorher bereits von a7-a5 und wLd8xa5 besucht). Wegen dieses Freizugs setzt sich diese Variante somit im Vergleich durch: In

jeder optimalen Partie müssen die Züge 9... Sc6xLa5 10... O-O-O 11... Td8-f8 vorkommen. Es folgt  $z(28) \leq 8,5$ . Die Stellung nach dem 9. Zug von Weiß ist wieder eindeutig:



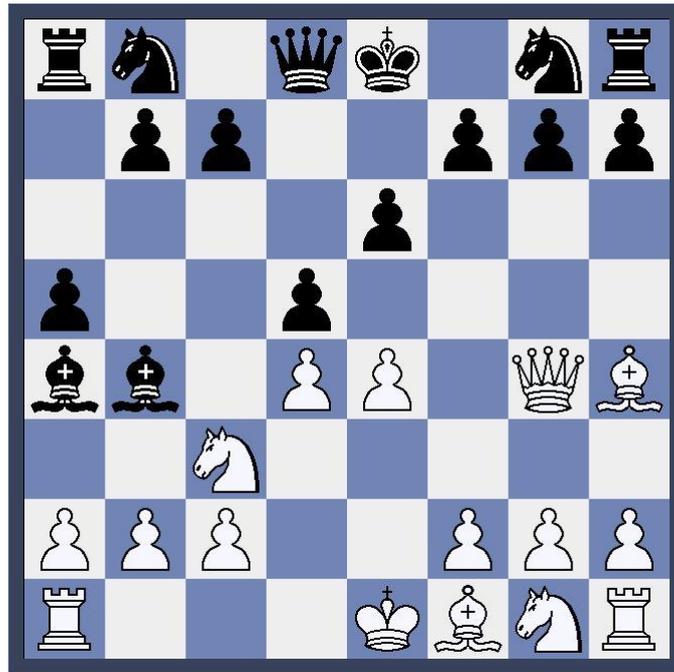
Im 9. Zug von Weiß haben wir nun die Wahl zwischen Ld8xa5 und Dd1-g4. Der Zug Ld8xa5 verliert die beiden Felder c7 und b6, aber nicht a5. Der Damenzug Dd1-g4 verliert mittlerweile bereits drei Felder (e2, f3, g4) – durch die Rücknahme von Lf1-d3 im 10. oder 11. Zug ist das Feld e2 hinzugekommen, d.h. der Damenzug ist im Wert gestiegen. Deshalb ist die Entscheidung im Sinne der Wettbewerbskriterien nun eindeutig: Im 9. Zug muss 9. Ld8xBa5 geschehen. Wir erhalten  $z(28) = 8,5$ ,  $z(27) = 8,5$  und  $z(26) \leq 8,0$ .

Im 8. Zug bestehen für Schwarz die beiden Möglichkeiten a7-a5 und Sb8-c6. Der Bauernzug verliert zwei Felder, während der Springerzug ein Freizug ist (das Feld c6 wird zuvor von sLd7-a4 und von c7-c5 besucht). Also benötigen wir in einer optimalen Partie den Zug 8... Sb8-c6, und es gilt  $z(26) \leq 7,5$ .

Im 8. Zug von Weiß ist der Damenzug Dd1-g4 (der drei Felder verliert) mit dem Läuferzug Lh4xd8 zu vergleichen; Letzterer verliert nur die beiden Felder f6 und d8, weil das Feld g5 in der Partie zuvor bereits von wLe3-g5 besucht wird und das Feld e7 von sLf8-b4. Also ist die Wahl wieder eindeutig, sie fällt auf 8. Lh4xDd8. Es gilt  $z(26) = 7,5$ ,  $z(25) = 7,5$  und  $z(24) \leq 7,0$ .

Schwarz hat im 7. Zug die Wahl zwischen den beiden Zügen a7-a5 und Ld7-a4, die jeder jeweils zwei Felder verlieren, und dem Freizug c7-c5 (die Felder c6 und c5 werden vorher von sLd7-a4 und sLf8-b4 besucht). Also erhalten wir 7... c7-c5 und  $z(24) \leq 6,5$ .

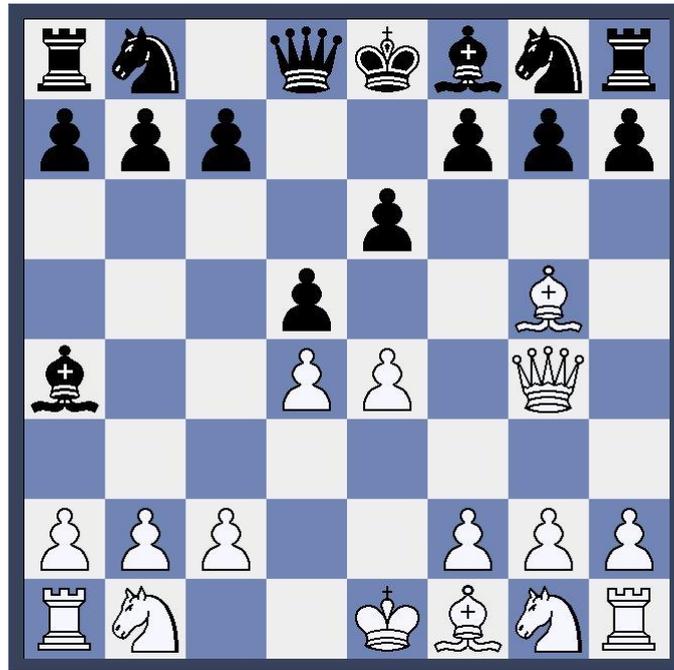
Wir haben die eindeutige Zugfolge 7... c7-c5 8. Lh4xDd8 Sb8-c6 9. Ld8xBa5 identifiziert. Es ergibt sich die folgende Stellung nach dem 7. Zug von Weiß:



Da bei Schwarz durch die Rücknahme von 7... c7-c5 im Rückwärtsspiel die Option Lf8-b4 neu zur Verfügung steht, hat Weiß nun im 7. Zug drei Zugmöglichkeiten: Dd1-g4, Lg5-h4 und Sb1-c3. Davon scheidet der Zug Dd1-g4 aus, weil er drei Felder verliert. Die anderen beiden Züge verlieren jeweils ein Feld, so dass wir  $z(24) = 6,5$  und  $z(23) \leq 6,0$  erhalten. Im Fall von 7. Sb1-c3 muss Schwarz im weiteren Rückwärtsspiel das Schach gegen den wK durch 6... Lf8-b4+ aufheben, während Schwarz im Fall von 7. Lg5-h4 die Wahl zwischen den drei Zugmöglichkeiten Ld7-a4, Lf8-b4 und a7-a5 offensteht. Jeder der beiden Läuferzüge verliert dabei drei Felder, während der Bauernzug a7-a5 nur zwei Felder verliert. Dem Bauernzug ist deshalb der Vorzug zu geben, und es folgt, dass in einer optimalen Partie die beiden Einzelzüge 6... a7-a5 7. Lg5-h4 vorkommen müssen. Außerdem erhalten wir  $z(23) = 6,0$ ,  $z(22) = 6,0$  und  $z(21) \leq 5,5$ .

Im 6. Zug von Weiß haben wir nun die drei Zugmöglichkeiten Dd1-g4, Le3-g5 und Sb1-c3. Diesmal ist Sb1-c3 der einzige Zug, der nur ein Feld verliert, also muss dieser Zug geschehen: Es ergibt sich 6. Sb1-c3,  $z(21) = 5,5$  und  $z(20) \leq 5,0$ .

Durch die Rücknahme 6. Sb1-c3 steht Weiß vor dem 6. Zug im Schach, und deshalb muss Schwarz nun den Zug 5... Lf8-b4+ zurücknehmen. Dieser Zug verliert die drei Felder e7, c5 und b4. Wir erhalten  $z(20) = z(19) = z(18) = 5,0$  und  $z(17) \leq 4,5$ . Die erreichte Stellung nach dem 5. Zug von Weiß halten wir im Diagramm fest:



Im restlichen Rückwärtsspiel beeinflussen die Manöver von Weiß und von Schwarz einander nun nicht mehr gegenseitig. Im 5. Zug von Weiß haben wir die Wahl zwischen  $Dd1-g4$  und  $Le3-g5$ . Der Läuferzug setzt sich durch, weil er nur zwei Felder verliert, d.h. wir haben 5.  $Le3-g5$ ,  $z(17) = z(16) = 4,5$  und  $z(15) \leq 4,0$ .

Im 4. Zug von Schwarz bestehen die beiden Möglichkeiten  $Ld7-a4$  und  $e7-e6$ . Der Bauernzug genießt Vorrang, weil er nur ein Feld verliert. Es folgt 4...  $e7-e6$ ,  $z(15) = 4,0$  und  $z(14) \leq 3,5$ .

Im 4. Zug von Weiß konkurrieren wiederum ein Damen- und ein Läuferzug. Der Zug 4.  $Lc1-e3$  verliert nur ein Feld und muss deshalb in einer optimalen Partie vorkommen. Wir erhalten  $z(14) = 3,5$  und  $z(13) \leq 3,0$ .

Die drei verbleibenden schwarzen Züge sind in ihrer Reihenfolge festgelegt: 1...  $d7-d5$ , 2...  $Lc8-d7$ , 3...  $Ld7-a4$ . Da der 3. Zug drei Felder verliert, ergibt sich  $z(13) = z(12) = z(11) = 3,0$  und  $z(10) \leq 2,5$ .

Im 3. Zug von Weiß ist nochmals eine Auswahlentscheidung zu treffen, nämlich zwischen  $Dd1-g4$  und  $d2-d4$ . Der Bauernzug setzt sich durch, weil er nur zwei Felder verliert. Wir haben also 3.  $d2-d4$ ,  $z(10) = z(9) = 2,5$  und  $z(8) \leq 2,0$ .

Die Reihenfolge der beiden verbleibenden weißen Züge ist eindeutig festgelegt: 1.  $e2-e4$  2.  $Dd1-g4$ . Die Anfangsphase der Partie lautet 1.  $e2-e4$   $d7-d5$  2.  $Dd1-g4$   $Lc8-d7$ , und daran lesen wir nun noch die letzten verbleibenden Werte  $z(n)$  ab:  $z(8) = 2,0$ ,  $z(7) = z(6) = z(5) = 1,5$ ,  $z(4) = z(3) = 1,0$  sowie  $z(2) = z(1) = 0,5$ . Der Vollständigkeit halber erwähnen wir auch noch  $z(0) = 0,0$ , was die Reihe beschließt.

Wir haben damit nun nachgewiesen, dass die Partie  $P_{MH}$  tatsächlich eine optimale Lösung der Aufgabenstellung darstellt – wie behauptet.

#### 4. Eigenschaften optimaler Lösungen

Im Verlauf der Analyse haben wir eine Reihe von Zügen identifiziert, die in jeder optimalen Lösung vorkommen müssen – sogar unter Berücksichtigung der Zugreihenfolge. Bei Schwarz sind 29 von 33 Zügen eindeutig festgelegt, nämlich die Züge Nr. 1-11, Nr. 14-23 und Nr. 26-33. Die verbleibenden vier schwarzen Züge bilden zwei Zugpaare, die jeweils bis auf Zugumstellung eindeutig sind: Die

beiden Züge h7-h6 und g7-g5 erfolgen in den Zügen Nr. 12-13 und die beiden Züge c5-c4 und Tb2xc2 in den Zügen Nr. 24-25. Für die gesamte Abfolge der 33 schwarzen Züge gibt es damit nur vier verschiedene Varianten.

In der weißen Zugfolge bestehen größere Freiheiten als in der schwarzen, aber auch hier gibt es immerhin noch 19 Züge, die einschließlich ihrer Zugnummer eindeutig feststehen. Dies sind die Züge Nr. 1-9, Nr. 12, Nr. 15, Nr. 18-19, Nr. 22 und Nr. 24-28. Unter den übrigen 14 weißen Zügen gibt es noch zehn weitere, die bis auf die exakte Reihenfolge bekannt sind – nämlich:

- das Paar aus den beiden Zügen Sg1-f3 und Lf1-d3, die in den beiden Zügen Nr. 10-11 geschehen müssen,
- die Gruppe der vier Züge e4-e5, a2-a3, Tf1-e1 und Ta1-a2, die in den Zügen Nr. 13-14 und Nr. 16-17 stattfinden müssen (wobei a2-a3 vor Ta1-a2 erfolgt und e4-e5 in einem der beiden Züge Nr. 13-14 erforderlich ist, so dass insgesamt sechs verschiedene Reihenfolgen möglich sind),
- die Gruppe der drei Züge h4-h5, Kg1-h2 und Kh2-g3, die in den Zügen Nr. 20-21 und Nr. 23 erfolgen (wobei Kg1-h2 vor Kh2-g3 an der Reihe ist, so dass sich drei verschiedene Reihenfolgen ergeben),
- und schließlich noch der Räumungszug f3-f4, der in irgendeinem der letzten fünf weißen Züge (Züge Nr. 29-33) nötig ist, um 33... Le4-g2 zu ermöglichen.

Die verbleibenden vier der letzten fünf Züge von Weiß unterliegen keinen weiteren spezifischen Bedingungen – außer, dass sie natürlich aus denjenigen Zügen ausgewählt werden müssen, die die Partie *CarCar* bereithält. Hierfür besteht ein reichhaltiges Angebot. Direkt in der Stellung nach dem 28. Zug von Schwarz sind die Zugmöglichkeiten Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2, f3-f4 und g2-g3 ersichtlich; diese Züge können in den Zügen Nr. 29-33 von Weiß beliebig miteinander kombiniert werden. Hinzu kommt noch Sd2-f1, sofern zuvor die Fesselung aufgehoben wird (z.B. durch Kf2-e3 oder Ld3-e2). Aber auch mehrzügige Manöver einzelner Steine sind möglich (oder Kombinationen davon), z.B. Dg4-h3-h2, Ld3-e2-h5-g4 (nach vorbereitendem f3-f4 und Dg4-h3), Sd2-f1-e3, f3-f4-f5-f6, nicht zuletzt aber auch diverse Turmwanderungen wie z.B. Ta2-b2-b1-b6, Th1-b1-e1-e6 oder auch das einfache Pendel Th1-b1-h1-b1-h1. Für detaillierte Untersuchungen zu den möglichen Verläufen der fünfzügigen Schlussphase der Partie sei auf den Anhang A weiter unten verwiesen.

Beim Aufschreiben der Partie *P\_MH* wurde bei jeder Wahlmöglichkeit in der Reihenfolge der Züge (d.h. im 10./11. Zug von Weiß, im 12./13. Zug von Schwarz, im 13./14./16./17. Zug von Weiß, im 20./21./23. Zug von Weiß, im 24./25. Zug von Schwarz und im 29.-33. Zug von Weiß) jeweils unter allen in Frage kommenden Zügen zuerst derjenige berücksichtigt, der im Verlauf der Partie *CarCar* die kleinste Zugnummer aufweist.

Wir wiederholen an dieser Stelle nochmals die Notation der Partie *P\_MH* und hinterlegen dabei die Züge, die einschließlich ihrer Position in der Zugreihenfolge exakt bekannt sind, in dunklem Grau und die Züge, die bis auf die Reihenfolge feststehen, in hellerem Grau.

Zug Nr. ( <i>P_MH</i> )	Zug Weiß	Zug Schwarz
1.	e2-e4	d7-d5
2.	Dd1-g4	Lc8-d7
3.	d2-d4	Ld7-a4
4.	Lc1-e3	e7-e6
5.	Le3-g5	Lf8-b4
6.	Sb1-c3	a7-a5
7.	Lg5-h4	c7-c5
8.	Lh4xd8	Sb8-c6
9.	Ld8xa5	Sc6xa5
10.	Sg1-f3	O-O-O
11.	Lf1-d3	Td8-f8
12.	O-O	h7-h6
13.	e4-e5	g7-g5
14.	a2-a3	f7-f5
15.	e5xf6	Tf8xf6
16.	Tf1-e1	Tf6-f5
17.	Ta1-a2	Tf5-f7
18.	Te1-a1	Tf7-h7
19.	h2-h4	Th7-d7
20.	h4-h5	Td7-d6
21.	Kg1-h2	Td6-b6
22.	a3xb4	Tb6xb4
23.	Kh2-g3	Tb4xb2
24.	Ta1-b1	c5-c4
25.	Tb1-h1	Tb2xc2
26.	Sf3-d2	Sg8-e7
27.	f2-f3	Th8-f8
28.	Kg3-f2	La4-e8
29.	Ld3-e2	Le8xh5
30.	Dg4-h3	Lh5-g6
31.	Dh3-h2	Lg6-f5
32.	Sd2-f1	Lf5-e4
33.	f3-f4	Le4xg2

## 5. Vergleich mit der Partie CarCar

### 5.1. Züge

Im Partieverlauf der optimalen Lösung *P\_MH* sind noch Spuren des wechselhaften Spielgeschehens der Partie *CarCar* zu erkennen: Weil Carlsen mit Schwarz gegen Caruana die vielfältigeren Pläne verfolgte und umfassend auf beiden Flügeln des Schachbretts agierte, wohingegen Caruana sich auf vergleichsweise passives Abwarten mit vielen Zugwiederholungen beschränkte, muss in unserer Lösung nun die schwarze Seite die anspruchsvolleren Aufgaben bewältigen. In erster Linie sind hier die Besuche auf den beiden Feldern c2 und g2 zu nennen, die allein schon direkt oder indirekt für den größten Teil der Züge verantwortlich sind, die Schwarz in der Partie *P\_MH* ausführt. Weiß kann zum Besuch dieser beiden Felder direkt nichts beitragen, obwohl sie quasi vor seiner Haustür liegen. Der weißen Seite fallen vergleichsweise einfachere Aufgaben zu; die aufwändigste ist noch der Besuch

des wK auf dem Feld f2. Weil in einer Schachpartie beide Seiten immer abwechselnd ziehen müssen, verfügt Weiß damit über viel freie Zeit (überzählige Züge). Weiß setzt diese Ressourcen nach Kräften ein, um Schwarz bei dessen komplizierteren Aufgaben zu unterstützen – hierzu zählen in erster Linie die Schläge auf d8, a5, f6 und b4, aber auch der Räumungszug f3-f4 und im weiteren Sinne sogar der Zug h4-h5, der den Besuch des Feldes h5 im Partieverlauf bereits früher erledigt als 29... Le8xh5 und damit zur Optimierung des sekundären Wettbewerbskriteriums z(59) beiträgt. Trotzdem bleiben vier Züge übrig, in denen Weiß komplett untätig abwarten muss, bis der sL sich endlich bis nach g2 vorgearbeitet hat.

Mit 66 Einzelzügen benötigt die optimale Lösung ein gutes Drittel (36%) der Länge der Partie *CarCar*. Wenn man aus *CarCar* die 20 Zugwiederholungen streicht, sind es 41%, und wenn man dann wiederum aus *P\_MH* die vier reinen Abwartezüge von Weiß nicht mitrechnet, sind es 39%.

Wir vergegenwärtigen uns nochmals den gesamten Verlauf der Partie *CarCar* und hinterlegen dabei die Züge, die zwingend in jeder optimalen Lösung der Aufgabenstellung vorkommen müssen, mit dunklem Grau. In hellerem Grau markieren wir Züge, die in einer optimalen Lösung vorkommen können, aber nicht müssen (in den letzten fünf Zügen von Weiß); Details hierzu sind weiter unten im Anhang A zu finden. Bei Zugwiederholungen innerhalb der Partie *CarCar* färben wir jeweils nur den ersten betreffenden Zug ein.

Zug Nr.	Weiß	Schwarz	Zug Nr.	Weiß	Schwarz	Zug Nr.	Weiß	Schwarz
1.	e2-e4	e7-e6	31.	Sf1-e3	Sf5xe3	61.	Te1-a1	Ta6-b6
2.	d2-d4	d7-d5	32.	Lc1xe3	Le8xh5	62.	Ta1-b1	Kf7-g6
3.	Sb1-c3	Lf8-b4	33.	Kh2-g3	Lh5-g6	63.	Kb2-c1	Tb6-a6
4.	e4-e5	c7-c5	34.	Ta2-b2	h6-h5	64.	Kc1-b2	Kg6-f5
5.	a2-a3	Lb4xc3+	35.	f2-f3	g5-g4	65.	Tb1-e1	Ta6-b6
6.	b2xc3	Sg8-e7	36.	Le3-g5	Tf6-f5	66.	Te1-b1	a7-a5
7.	Sg1-f3	Sb8-c6	37.	f3-f4	Tf8-e8	67.	Kb2-c1	Le4-g2
8.	Lf1-d3	Lc8-d7	38.	Te1-e2	Kb8-c7	68.	Kc1-d2	Kf5-e4
9.	O-O	Dd8-c7	39.	Tb2-b1	Tf5-f7	69.	Tb1-e1+	Ke4-f3
10.	Tf1-e1	Sc6-a5	40.	Tb1-h1	Tf7-h7	70.	Te1-e2	b5-b4
11.	Sf3-g5	Se7-g6	41.	Kg3-f2	Kc7-b6	71.	a3xb4	a5xb4
12.	Te1-e3	c5-c4	42.	g2-g3	Kb6-a5	72.	Te2-e3+	Kf3-f2
13.	Ld3-e2	Sa5-c6	43.	Kf2-e3	Lg6-f5	73.	Te3-e2+	Kf2-f3
14.	Le2-h5	Sc6-e7	44.	Ke3-d2	Te8-c8	74.	Te2-e3+	Kf3-f2
15.	Dd1-g4	Ld7-a4	45.	Lg5-h4	Th7-d7	75.	Te3-e2+	Kf2-g1
16.	Ta1-a2	Se7-f5	46.	Th1-b1	Tc8-c6	76.	Te2-e1+	Kg1-h2
17.	Te3-e1	O-O-O	47.	Te2-e1	Tc6-b6	77.	c3xb4	Tb6xb4
18.	Sg5-f3	Kc8-b8	48.	Tb1xb6	Ka5xb6	78.	Te1xe6	Lg2-e4
19.	h2-h4	Td8-f8	49.	Te1-b1+	Kb6-c7	79.	Te6xe4	d5xe4
20.	Dg4-h3	Sg6-e7	50.	Kd2-c1	Td7-d6	80.	f4-f5	Kh2-g2
21.	Dh3-h2	h7-h6	51.	Kc1-b2	Td6-b6+	81.	Kd2-e3	Tb4-b2
22.	Lh5-g4	g7-g5	52.	Kb2-c1	Tb6-a6	82.	d4-d5	Tb2xc2
23.	h4-h5	Sf5-g7	53.	Kc1-b2	Lf5-e4	83.	d5-d6	c4-c3
24.	Sf3-d2	f7-f5	54.	Lh4-g5	Kc7-d7	84.	d6-d7	Tc2-d2
25.	e5xf6	Dc7xh2+	55.	Lg5-h4	Kd7-e8	85.	d7-d8=D	Td2xd8
26.	Kg1xh2	Tf8xf6	56.	Kb2-a2	b7-b6	86.	Lh4xd8	h5-h4
27.	Lg4-f3	Th8-f8	57.	Ka2-b2	Ke8-f7	87.	g3xh4	g4-g3
28.	Sd2-f1	Se7-f5	58.	Tb1-e1	b6-b5	88.	f5-f6	c3-c2
29.	Lf3-g4	La4-e8	59.	Te1-b1	Kf7-g6	89.	Ke3-d2	e4-e3+
30.	Lg4xf5	Sg7xf5	60.	Tb1-e1	Kg6-f7	90.	Kd2xc2	e3-e2
						91.	Ld8-a5	

Es fällt auf, dass von den 62 zwingend erforderlichen Einzelzügen der größte Teil, nämlich 49 Stück (79%), in die erste Hälfte der Partie *CarCar* fällt. Andererseits ist es eine besondere Pointe der Lösung, dass sie den allerletzten der 181 Einzelzüge aus *CarCar* benötigt.

Die frühesten beiden Einzelzüge aus der Partie *CarCar*, die für die Lösung der Aufgabenstellung nicht benötigt werden, sind der Abtausch 5... Lb4xc3 6. b2xc3. Diese beiden Züge tragen zum Erreichen der Zielsetzung unserer Aufgabenstellung nichts bei, denn das Feld c3 ist ja bereits durch wSb1-c3 besucht worden. Weder der sL noch der wB wird auf dem Feld c3 benötigt, und der wSc3 stört den weiteren Lösungsverlauf nicht. Der sLb4 behindert zwar die Wanderung des sT (konkret den Zug sTb6-b4), aber dank des weißen Schlags a3xb4 kann dieses Problem gelöst werden, ohne den sLb4 zu bewegen.

Der nächste Einzelzug aus *CarCar*, der in unserer Lösung nicht genutzt wird, ist der Zug 9... Dd8-c7. Auf diesen Zug können wir deshalb verzichten, weil wir die sD durch wLh4xd8 auf ihrem Ursprungsfeld schlagen. Im weiteren Verlauf der Partie *CarCar* beginnt mit 11. Sf3-g5 die lange Phase, in der häufig Figuren hin- und hergezogen werden. Das Manöver 11. Sf3-g5 18. Sg5-f3

benötigen wir nicht (im Gegensatz zu 24. Sf3-d2), und dieses Prinzip wiederholt sich dann im weiteren Partieverlauf vielfach.

## 5.2. Schläge

Wir haben gerade gesehen, dass die beiden Schläge a3xb4 und wLh4xd8 in unserer Lösung wesentlich zur Einsparung von Zügen beitragen. Wir werfen einen systematischen Blick auf die schlagenden Züge, die im Verlauf der optimalen Lösung vorkommen. In der Anfangsphase (bis zum 28. Zug) haben wir die neun Schläge 8. Lh4xd8, 9. Ld8xa5, 9... Sc6xa5, 15. e5xf6, 15... Tf8xf6, 22. a3xb4, 22... Tb6xb4, 23... Tb4xb2 und 24./25... Tb2xc2; hinzu kommt im weiteren Partieverlauf noch der Schlag 29... Le8xh5, der deshalb zwangsläufig vorkommen muss, weil der wBh5 im 29. Zug von Weiß das Feld h5 nicht verlassen kann. Wir haben also zehn Schläge, die zwingend in der Lösung vorkommen müssen. In der Partie *P\_MH* tritt außerdem auch noch der Schlag 33... Le4xg2 auf, aber dieser ist nicht zwingend notwendig, da er z.B. durch 32. g2-g3 vermieden werden kann. Andererseits lässt sich in der Schlussphase der Partie neben 33... Le4xg2 auch noch ein weiterer Schlag unterbringen, nämlich wTe1xBc6 oder sLg6xBf5 (aber nicht beide gleichzeitig, vgl. Anhang A). Wir haben in der Lösung also mindestens zehn und höchstens zwölf Schläge.

Von den zehn notwendigen Schlägen ereignen sich vier in einer vergleichbaren Situation wie in der Partie *CarCar*:

- Durch e5xf6 schlägt in beiden Partien der weiße e-Bauer den schwarzen f-Bauern;
- durch sTf8xf6 schlägt der schwarze Damenturm den weißen e-Bauern;
- durch sTb2xc2 schlägt der schwarze Damenturm den weißen c-Bauern;
- durch sLe8xh5 schlägt der schwarze Damenläufer den weißen h-Bauern.

Der Zug sTb6xb4 scheint auf den ersten Blick ebenfalls in diese Reihe zu gehören; allerdings schlägt der schwarze Damenturm hier in unserer Lösung den weißen a-Bauern, während das Schlagopfer in der Partie *CarCar* der weiße b-Bauer ist.

Es gibt noch zwei weitere schlagende Züge der optimalen Lösung, die auch in der Partie *CarCar* mit einem Schlag verbunden sind, wobei allerdings das Schlagopfer ein anderes ist:

- Durch wLh4xd8 schlägt der weiße Damenläufer in unserer Lösung die schwarze Dame, während in der Partie *CarCar* der schwarze Damenturm geschlagen wird;
- durch a3xb4 schlägt der weiße a-Bauer in unserer Lösung den schwarzen Königsläufer, während in der Partie *CarCar* der schwarze b-Bauer geschlagen wird.

Diese beiden Schläge bilden zwei der größten Pointen der optimalen Lösung unserer Aufgabenstellung: Beide Züge werden aus dem Sinnzusammenhang der Partie *CarCar* herausgelöst und für die Zwecke unserer Lösung komplett „umgedeutet“.

Die verbleibenden drei notwendigen Schläge unserer Lösung werden in der Partie *CarCar* ohne Schlag gespielt:

- Bevor sLd8-a5 geschieht, ist in der Partie *CarCar* der schwarze a-Bauer schon längst weitergezogen;
- auch vor sTb4-b2 hat der weiße b-Bauer sein Ursprungsfeld bereits verlassen;
- andererseits gelangt der weiße Damenläufer in der Partie *CarCar* erst zu einem viel späteren Zeitpunkt auf das Feld a5 als der schwarze Springer mit Sc6-a5.

Umgekehrt gibt es aber in unserer Lösung auch zwei nichtschlagende Züge, die in der Partie *CarCar* mit einem Schlag verbunden sind:

- Durch  $wLc1-e3$  wird in *CarCar* der schwarze Damenspringer geschlagen, der in unserer Lösung bis zum Partieende auf dem Feld  $a5$  verbleibt;
- durch  $wKg1-h2$  wird in *CarCar* die  $sD$  geschlagen, die in unserer Lösung schon auf ihrem Ursprungsfeld  $d8$  beseitigt wird.

Auf drei verschiedenen Feldern wird im Partieverlauf unserer Lösung zweimal geschlagen – und zwar jeweils zuerst von Weiß und dann im unmittelbar darauffolgenden Zug von Schwarz. Diese drei „Doppelschläge“ wirken also ähnlich wie ein herkömmlicher Abtausch in einer Turnierpartie. Im Fall von  $15. e5xf6 Tf8xf6$  handelt es sich auch tatsächlich um einen Abtausch, der in der Partie *CarCar* vorkommt (wenn auch dort unterbrochen durch den eingeschobenen Damentausch auf  $h2$ ). Die beiden anderen Tauschmanöver  $9. Ld8xa5 Sc6xa5$  und  $22. a3xb4 Tb6xb4$  sind allerdings nicht Bestandteil der Partie *CarCar*.

Die drei Abtauschmanöver spielen in unserer Lösung eine besondere strategische Rolle – durch sie gelingt es, dass die weiße Seite der schwarzen Seite die Arbeit erleichtert. Von der gleichen Sorte ist natürlich auch der Schlag  $wLh4xd8$ . Die verbleibenden drei Schläge  $sTb4xb2$ ,  $sTb2xc2$  und  $sLe8xh5$  haben hingegen keine vergleichbare strategische Motivation – sie ereignen sich quasi durch Zufall, weil die weißen Bauern gerade auf den Feldern stehen, die von den schwarzen Figuren angesteuert werden.

Da sich in unserer Lösung mindestens zehn und höchstens zwölf Schläge ereignen, verbleiben in der Schlussstellung noch 20-22 Steine auf dem Brett – das damit am Ende unserer Partie wesentlich dichter bevölkert ist als am Ende der Partie *CarCar*, wo nur ganze sieben Steine übrig bleiben. Es ist einsichtig, dass wir in unserer Lösung mit deutlich weniger Schlägen auskommen als die Partie *CarCar*. Für unsere Aufgabenstellung (Besuch möglichst vieler Felder in möglichst wenigen Zügen) bietet ein Schlagfall a priori keinen besonderen Nutzen; es müssen schon besondere Umstände vorliegen, damit es sinnvoll ist, einen Stein für ein bestimmtes Manöver aus dem Weg zu räumen. Andererseits sind Schlagfälle in einer klassischen Turnierpartie zwar ebenfalls kein Selbstzweck, aber in der Regel doch besondere Höhepunkte, die den Charakter der Partie wesentlich beeinflussen (durch Materialgewinn, Opfer oder Abtausch). Im Verhältnis zur Gesamtzügezahl bietet unsere Lösung übrigens nicht weniger Schläge (15-18%) als in der Partie *CarCar* (14%).

### **5.3. Austausch von Zügen**

In der Aufgabenstellung ist es ausdrücklich erlaubt, dass gleichartige Steine (einer Farbe) ihre Züge untereinander austauschen. Unter den 62 zwingend erforderlichen Zügen der optimalen Lösung wird dieser besondere Kniff allerdings letztlich nur ein einziges Mal genutzt, nämlich wenn der weiße Königsturm durch  $25. Tb1-h1$  einen Zug seines Kollegen, des Damenturms, „übernimmt“. Natürlich kommen die Könige, Damen und Läufer für ein derartiges Wechselspiel grundsätzlich nicht in Frage (da die weiße Original-Dame in der Partie nicht nach  $d8$  gelangt und die Umwandlungsdame von  $d8$  aus keinen Zug ausführt, können auch diese beiden Damen keine Züge austauschen). Bei den Bauern wäre das Manöver  $g2-g3-h4-h5$  die einzige theoretische Möglichkeit (die für unsere Lösung aber keine Rolle spielt). Die weißen Springer können ebenfalls keine Züge austauschen, aber bei den schwarzen Springern und den schwarzen Türmen wäre dies grundsätzlich möglich. Im Fall von  $sTh8-f8-f6$  usw. wäre dieses Vorgehen sogar einigermaßen naheliegend, aber es führt trotzdem nicht zu einer optimalen Lösung. Lediglich bei den  $wTt$  (die in der Partie *CarCar* besonders viel hin- und hierziehen) kommt dieses Mittel damit tatsächlich zur Anwendung.

### 5.4. Besuche

Im Verlauf der Partie *CarCar* werden 60 Felder besucht, davon die meisten mehrfach. Durch einfaches (wenn auch langwieriges) Abzählen erhält man die folgenden Anzahlen der Besuche pro Feld:

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	
<b>8</b>	---	2	2	5	4	2	1	---	<b>8</b>
<b>7</b>	---	---	5	6	6	6	3	1	<b>7</b>
<b>6</b>	3	9	7	6	2	6	6	1	<b>6</b>
<b>5</b>	4	5	2	3	4	9	5	4	<b>5</b>
<b>4</b>	1	7	1	2	7	3	5	5	<b>4</b>
<b>3</b>	1	2	4	3	11	10	4	2	<b>3</b>
<b>2</b>	2	7	3	6	11	3	2	4	<b>2</b>
<b>1</b>	1	7	14	10	10	4	4	1	<b>1</b>
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	

Die beiden Rochaden (wO-O und sO-O-O) wurden dabei jeweils einfach gezählt – je nach Interpretation des Begriffs „Besuch“ könnte man alternativ auch die Ansicht vertreten, dass die Felder f1, g1, d8 und c8 im Verlauf der Rochade je einmal von König und Turm besucht werden, also zusammen zweimal.

Den Rekord (14 Besuche – alle durch wK und wTT) hält in der Partie *CarCar* das Feld c1, während es andererseits mit a1, h1, a3, a4, c4, h6, h7 und g8 acht Felder gibt, die nur einmal besucht werden. Die Besuche auf diesen Feldern spielen im obigen Beweis eine wichtige Rolle.

Wenn wir für jede vorgegebene Anzahl von Besuchen die dazugehörigen Felder zählen, erhalten wir die folgende Übersichtsliste:

<b>Besuche je Feld</b>	<b>14</b>	<b>11</b>	<b>10</b>	<b>9</b>	<b>7</b>	<b>6</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>Summe</b>
<b>Anzahl Felder</b>	1	2	3	2	5	7	6	9	7	10	8	4	64
<b>Besuche gesamt</b>	14	22	30	18	35	42	30	36	21	20	8	0	276

Die 64 Felder des Schachbretts werden im Durchschnitt 4,31-mal besucht; bei Einschränkung auf die 60 besuchten Felder sind es im Durchschnitt 4,60 Besuche pro Feld.

Die gleiche Zählung führen wir nun zum Vergleich in der Partie *P\_MH* durch, wobei wir uns allerdings auf die 62 zwingend erforderlichen Züge beschränken. Dann ergibt sich das folgende Bild:

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	
<b>8</b>	---	1	1	2	2	2	1	---	<b>8</b>
<b>7</b>	---	---	1	3	4	4	2	1	<b>7</b>
<b>6</b>	1	2	5	3	1	5	3	1	<b>6</b>
<b>5</b>	3	3	2	1	1	3	3	2	<b>5</b>
<b>4</b>	1	3	1	1	2	2	1	2	<b>4</b>
<b>3</b>	1	1	1	2	2	4	1	1	<b>3</b>
<b>2</b>	1	1	1	2	2	1	1	1	<b>2</b>
<b>1</b>	1	2	2	2	2	2	2	1	<b>1</b>
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	

<b>Besuche je Feld</b>	<b>5</b>	<b>4</b>	<b>3</b>	<b>2</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>Summe</b>
<b>Anzahl Felder</b>	2	3	8	20	27	4	64
<b>Besuche gesamt</b>	10	12	24	40	27	0	113

Die 64 Felder des Schachbretts werden hier im Durchschnitt nur noch 1,77-mal besucht; bei Einschränkung auf die 60 besuchten Felder sind es im Durchschnitt 1,88 Besuche pro Feld.

Wie zu erwarten war, geht unsere Lösung mit den Besuchen deutlich sparsamer um. Für immerhin 27 Felder (also fast die Hälfte der 60 relevanten Felder) kommen wir mit einem einzigen Besuch aus, das sind mehr als dreimal so viele wie in der Partie *CarCar*. Trotzdem gibt es auch in unserer Lösung noch zwei Felder mit je fünf Besuchen (c6 und f6) und drei weitere Felder mit je vier Besuchen (f3, e7, f7). Diese fünf Felder sind quasi die Dreh- und Angelpunkte des Geschehens. Vier davon (c6, f6, f3, e7) werden im Partieverlauf von jeweils vier verschiedenen Steinen besucht – das fünfte Feld (f7) andererseits dreimal vom gleichen Stein: Der schwarze Damenturm vollführt einen kleinen Tanz rund um dieses Feld, das er einmal betritt und zweimal überschreitet.

Da wir uns nur auf die 62 notwendigen Züge der optimalen Lösung beschränkt haben, ist die obige Statistik nicht ganz zutreffend. Durch die vier weißen Abwartezüge in der Schlussphase der Partie kommen mindestens vier redundante Besuche hinzu. Die durchschnittliche Anzahl der Besuche pro Feld steigt von 1,77 auf mindestens 1,83 (bei 64 Feldern) bzw. von 1,88 auf mindestens 1,95 (bei 60 Feldern).

Wenn wir in der Schlussphase die beiden optionalen Züge f4-f5 und f5-f6 nutzen, können wir die Gesamtzahl der Besuche auf dem Feld f6 von fünf auf sechs Besuche steigern. Das Feld f6 steht mit diesem Rekord allerdings nicht allein: Falls in der Schlussphase das vierzügige Turmmanöver Th1-b1-h1-b1-h1 vorkommt, so gibt es mit c1, d1, e1, f1 und g1 sogar gleich fünf Felder, die in der Lösung jeweils sechsmal besucht werden. Anhand dieses Beispiels können wir auch die durchaus kuriose Feststellung machen, dass eine optimale Lösung einzelne Felder sogar häufiger besuchen kann als die Partie *CarCar* selbst (hier: die Felder f1, g1 und h1).

### 5.5. CarCar als Lösung der Aufgabe

Die Partie *CarCar* besteht trivialerweise nur aus Zügen, die in *CarCar* vorkommen (um eine solche Aussage überhaupt zu formulieren, muss man wohl Mathematiker sein), und außerdem besucht sie 60 Felder. Die Partie *CarCar* kommt damit grundsätzlich als Lösung der Aufgabenstellung in Frage. Wir untersuchen, in welchem Zug der Partie *CarCar* die 60 verschiedenen Felder jeweils zum ersten Mal besucht werden. Dies führt zu dem folgenden Ergebnis:

	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	
<b>8</b>	---	17 s	17 s	17 s	19 s	19 s	27 s	---	<b>8</b>
<b>7</b>	---	---	9 s	8 s	3 s	26 s	23 s	40 s	<b>7</b>
<b>6</b>	52 s	41 s	4 s	2 s	1 s	24 s	11 s	21 s	<b>6</b>
<b>5</b>	10 s	15 s	3 s	2 s	4 w	16 s	11 w	14 w	<b>5</b>
<b>4</b>	15 s	3 s	12 s	2 w	1 w	25 s	14 w	19 w	<b>4</b>
<b>3</b>	5 w	48 w	3 w	2 w	1 w	7 w	25 s	19 w	<b>3</b>
<b>2</b>	16 w	34 w	82 s	24 w	8 w	41 w	67 s	21 w	<b>2</b>
<b>1</b>	61 w	39 w	40 w	40 w	10 w	9 w	9 w	40 w	<b>1</b>
	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	

Das letzte (60.) Feld wird also in *CarCar* im 82. Zug von Schwarz besucht (es ist das Feld c2). Um mit der Partie *CarCar* am Wettbewerb teilzunehmen, könnte man somit die letzten 8,5 Züge weglassen.

Andererseits sind für jede optimale Lösung des Wettbewerbs zwei Züge aus dieser Schlussphase von *CarCar* von wesentlicher Bedeutung: 86. Lh4-d8 und 91. Ld8-a5. Wenn die Partie *CarCar* nicht bis zum letzten Zug gespielt worden wäre (etwa durch eine frühere Aufgabe Carlsens), dann müsste unsere optimale Lösung im Wettbewerb einen Zug mehr verbrauchen. Denn da Schwarz keine sinnvolle Möglichkeit hat, auf d8 zu schlagen (sTd2xd8 benötigt viel zu viele Züge, und außerdem würde der sTd8 danach selbst wieder die Rochade verhindern), steht ohne wLd8-a5 auch der Schlag wLh4xd8 nicht mehr zur Verfügung. Zur Vorbereitung der Rochade muss Schwarz deshalb nun Dd8-c7 ziehen – und benötigt damit 34 Züge. Die optimalen Lösungen der Aufgabenstellung unter der zusätzlichen Voraussetzung, dass der Zug 91. Ld8-a5 nicht zur Verfügung steht, werden weiter unten im Anhang B bestimmt.

### **5.6. P\_MH als Turnierpartie**

Die Partie *CarCar* ist als Lösung für unsere Aufgabenstellung zwar zulässig, aber vom Optimum weit entfernt. Dies gilt allerdings umgekehrt auch für die Partie *P\_MH*, wenn man sie aus dem Blickwinkel eines Turnierschachspielers betrachtet. Es handelt sich zwar um eine legale Schachpartie, aber die Züge wirken so, als wären beide beteiligten Spieler entweder blutige Anfänger oder sehr unaufmerksam oder sogar beides. Insbesondere gehen beide Seiten sehr sorglos mit den Damen um – mit der eigenen und auch mit der gegnerischen. Insgesamt sieben Züge der Partie muss man als schwere Fehler ansehen, weil sie entweder die eigene Dame verlieren oder andererseits auf einen möglichen Damengewinn verzichten. Den Anfang macht hierbei Weiß mit dem Zug 2. Dg4?, der einzülig die Dame einstellt und deshalb in der Skandinavischen Eröffnung nach 1. e4 d5 die sicherste und schnellste Art darstellt, schon im zweiten Zug die Partie zu verlieren. Hat Weiß übersehen, dass das Feld g4 vom schwarzen Läufer kontrolliert wird? Ist der Damenzug als besonders extravagante Idee zu verstehen, den angegriffenen Be4 zu decken?

Der Zug 2. Dg4 ist der einzige in der Partie *P\_MH*, in dem eine Dame aktiv eingestellt wird. Aber in gleich drei weiteren Zügen wird eine Bedrohung der eigenen Dame nicht pariert, was letztlich den gleichen Effekt hat: 3. d4?, 6... a5? und 7... c5?. Weiß und Schwarz werfen also ihre jeweilige Dame je zweimal der Gegenseite zum Fraß vor – ohne erkennbare Kompensation. Beide Seiten verzichten aber auch auf den Damengewinn: Schwarz zweimal mit 2... Ld7? und 3... La4?, Weiß einmal mit 7. Lh4?. Erst im achten Zug scheint sich Weiß plötzlich an den hohen, spielentscheidenden Materialwert einer Mehrdame zu erinnern: Er greift mit 8. Lxd8! zu.

Nach dem Damengewinn 8. Lxd8 ist die Partie objektiv für Weiß entschieden, Schwarz hat keine vernünftigen Hoffnungen mehr auf Gegenspiel. Weiß scheint im weiteren Partieverlauf nicht allzu zielstrebig auf den Gewinn hinzuarbeiten (etwa durch Mattangriff, weiteren Materialgewinn oder Abtausch zur Stellungsvereinfachung), aber jedenfalls läuft er auch zu keinem Zeitpunkt Gefahr, den entscheidenden Materialvorteil wieder herzugeben. Er erinnert sich sogar im 15. und im 30. Zug an den Wert seiner Dame und rettet sie jeweils vor den schwarzen Angriffen 14... f5 und 29... Lxh5 (wobei es aber unklar bleibt, warum Weiß im 30. Zug nicht einfach den sLh5 durch Txh5 oder Dxh5 beseitigt). Die Schlussstellung nach dem 33. Zug ist für Weiß klar gewonnen (wie ja übrigens auch die Schlussstellung der Partie *CarCar*); Weiß könnte mit 34. Dxh6, 34. Txa5, 34. Kxg2 oder 34. Txc2 jeweils seinen ohnehin schon beträchtlichen Vorteil noch weiter ausbauen.

## 6. Bemerkungen zur Lösungsfindung

(Dieser Abschnitt wurde im Dezember 2020 nach einem Hinweis von Wolfgang Erben nachbearbeitet.)

Bekanntlich ist es nicht der vorrangige Zweck eines mathematischen Beweises, im Detail den Weg nachzuzeichnen, auf dem das zu beweisende Resultat ursprünglich erzielt wurde. Trotzdem bildet der oben wiedergegebene Beweis in den Grundzügen bereits einen großen Teil der Überlegungen ab, die zur Konstruktion der Partie  $P_{MH}$  geführt haben. Es folgen nun noch einige ergänzende Bemerkungen.

Die größte Hürde an der Aufgabenstellung besteht vermutlich darin, den richtigen Einstieg zu finden. Es ist sinnvoll, die Partie  $CarCar$  mehrfach durchzuspielen und sie nach Möglichkeit zu verinnerlichen; nützlich dürfte es auch sein, sich die Zugfolgen herauszuschreiben, die die einzelnen Steine im Partieverlauf durchführen. Für mein Verständnis war es allerdings der wichtigste und nützlichste Ansatz, eine große Kreuztabelle aller 181 Einzelzüge aus  $CarCar$  und aller 64 Felder des Schachbretts anzulegen – also eine Tabelle mit 181 Zeilen und 64 Spalten, in der jeweils angekreuzt wird, ob der betreffende Zug das jeweilige Feld besucht oder nicht. Die 20 in  $CarCar$  enthaltenen Zugwiederholungen braucht man bei der Erstellung der Tabelle nicht zu berücksichtigen, wie auch die vier unbesuchten Felder a7, b7, a8 und h8 entfallen können. Letztlich umfasst die Kreuztabelle damit 161 Zeilen und 60 Spalten.

Ein sehr naheliegender Ansatz besteht nun darin, aus der Tabelle zunächst diejenigen Felder herauszusuchen, die nur von einem einzigen Zug aus  $CarCar$  besucht werden – denn dieser Zug muss dann in jeder Lösung der Aufgabenstellung notwendigerweise vorkommen. Es gibt acht solche Felder: a1, h1, a3, a4, c4, h6, h7 und g8. Diese Felder liefern unmittelbar die folgenden Züge für die Lösung:

Weiß: Te1-a1, Tb1-h1, a2-a3,

Schwarz: Ld7-a4, c5-c4, h7-h6, Tf7-h7, Th8-f8.

Die Steine, die diese Züge ausführen, müssen im Partieverlauf der Lösung irgendwie aus der Partieanfangsstellung heraus auf die passenden Felder für die Züge gebracht werden. Bei den Bauernzügen a2-a3 und h7-h6 sowie bei sTh8-f8 bringt diese Überlegung nichts Neues, und bei den weißen Turmzügen wTe1-a1 und wTb1-h1 stellt  $CarCar$  diverse Möglichkeiten bereit, um die Türme nach e1 und b1 zu bewegen. Aber in immerhin drei Fällen werden wir fündig: Zu sLd7-a4 und zu c5-c4 gehören als Vorbedingung die beiden Züge sLc8-d7 und c7-c5, und zu sTf7-h7 sogar die mehrzügige Wanderung sTf8-f6-f5-f7. Wir kennen also nun schon mehr Züge, die in jeder Lösung vorkommen müssen:

Weiß: Te1-a1, Tb1-h1, a2-a3,

Schwarz: Lc8-d7-a4, c7-c5-c4, h7-h6, Tf8-f6-f5-f7-h7, Th8-f8.

Die nächste Überlegung besteht darin, dass alle diese Züge Platz benötigen – die Felder, die von einem Zug überschritten werden, müssen frei sein, und das Zielfeld darf von keinem Stein der eigenen Farbe besetzt sein. Da sich mehrere der bisher gefundenen Züge im Bereich der ersten beiden Reihen der betreffenden Farbe abspielen, müssen deshalb diverse Steine ihre jeweiligen Felder aus der Partieanfangsstellung räumen. Insbesondere die beiden weißen Turmzüge führen hier zu umfangreichen neuen Erkenntnissen. Es ergibt sich die folgende Liste der erforderlichen Züge:

Weiß: O-O, Kg1-h2, Dd1-g4, Tf1-e1, Te1-a1, Tb1-h1, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, e2-e4 (12 Züge),

Schwarz: Tf8-f6-f5-f7-h7, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6 (16 Züge).

An dieser Stelle lohnt sich schon eine erste Zwischenbilanz der Felder, die von den bisher identifizierten 28 Einzelzügen insgesamt besucht werden:

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	---					x	x	---	8
7	---	---		x	x	x	x	x	7
6			x	x	x	x	x	x	6
5		x	x	x		x	x		5
4	x	x	x		x		x		4
3	x		x	x	x	x			3
2				x	x			x	2
1	x	x	x	x	x	x	x	x	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Immerhin 39 von 60 Feldern sind bereits abgearbeitet. Andererseits sind immer noch 21 Felder übrig, die wir erreichen müssen. An dieser Stelle der Analyse sieht es vorübergehend so aus, als könnte die weitere Untersuchung eine unübersichtliche Vielzahl von Varianten und Fallunterscheidungen umfassen.

Doch nun helfen zwei kleine Geistesblitze weiter, die mit den beiden Feldern b8 und c2 zusammenhängen:

- Das Feld b8 wird in *CarCar* von den beiden Zügen sO-O-O und sKc8-b8 besucht. Der erste Zug ist die Voraussetzung für den zweiten, also muss die Rochade sO-O-O auf jeden Fall in der Lösung vorkommen.
- Das Feld c2 wird in *CarCar* zwar sogar von drei Zügen besucht (wKd2-c2, sTb2-c2, c3-c2), aber weil der weiße c-Bauer selbst in der Partie nicht zieht, ist der Schlag sTb2xc2 eine notwendige Voraussetzung für die beiden anderen Züge. In der Lösung muss also zwingend der Turmzug sTb2-c2 vorkommen.

Das erste dieser beiden neuen Resultate (b8) stellte sich bei meinen Überlegungen recht schnell ein, während sich das zweite (c2) erst nach längerem Grübeln offenbarte. Grundsätzlich muss aber jeder Löser, der sich mit der Aufgabenstellung beschäftigt, früher oder später zu diesen beiden Erkenntnissen gelangen. Auf welchem Weg man auch immer versucht, eine Lösung zu konstruieren – man wird stets feststellen, dass die beiden Züge sO-O-O und sTb2-c2 benötigt werden. Die Rochade macht es nebenbei unmöglich, die Wanderung des sK zum weißen Königsflügel aus *CarCar* abzukürzen, indem man in der Lösung unter Verzicht auf die Rochade gleich mit sKe8-f7 beginnt. Dieses Manöver wäre zwar elegant, aber es funktioniert nicht.

Für sTb2-c2 werden die Vorgängerzüge Tb6-b4-b2 benötigt. Wie der sT nach b6 gelangt, ist noch nicht klar, aber jedenfalls braucht er von h7 oder f8 aus mindestens drei Züge. Die Rochade sO-O-O erzwingt den Springerzug sSb8-c6.

Natürlich muss für sO-O-O auch die sDd8 ihr Ursprungsfeld verlassen. An dieser Stelle muss der Löser nun genau hinsehen: Wenn er den naheliegenden Zug sDd8-c7 ausführt, hat er die optimale Lösung verpasst. Der Damenzug nach c7 ist eigentlich in mehrfacher Hinsicht verlockend: Er erledigt mit c7 eines der 21 Felder des Schachbretts, die bisher noch offen sind, und außerdem ermöglicht er den

nachfolgenden Damenzug sDc7-h2, der mit e5, f4, g3 gleich drei Felder auf einmal abarbeiten könnte. Und trotzdem: Der Zug sDd8-c7 ist nicht zwingend erforderlich, sondern die sD kann auch durch wLh4xd8 beseitigt werden. Da wir uns in der Analyse bisher nur auf unbedingt benötigte Züge beschränken, zählen wir den Damenzug also nicht mit.

Neue Liste der Züge:

Weiß: O-O, Kg1-h2, Dd1-g4, Tf1-e1, Te1-a1, Tb1-h1, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, e2-e4 (12 Züge),

Schwarz: O-O-O, Tb6-b4-b2-c2, Tf8-f6-f5-f7-h7, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6 (21 Züge).

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	---	x	x	x		x	x	---	8
7	---	---		x	x	x	x	x	7
6		x	x	x	x	x	x	x	6
5		x	x	x		x	x		5
4	x	x	x		x		x		4
3	x	x	x	x	x	x			3
2		x	x	x	x			x	2
1	x	x	x	x	x	x	x	x	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Von den 21 bisher offenen Feldern sind jetzt immerhin sieben weitere erledigt: b2, c2, b3, b6, b8, c8, d8. Es bleiben 14 Felder zu untersuchen.

Anhand dieser 14 Felder lassen sich nun vorläufig keine weiteren Züge ermitteln, die zwingend in der Lösung vorkommen müssen. Angesichts der bisherigen Zwischenergebnisse zeichnet sich aber bereits ab, dass Schwarz im Verlauf der Partie anspruchsvollere Aufgaben zu lösen hat als Weiß und dafür mehr Züge benötigt. Es ist nun eine naheliegende Idee, für die verbleibenden 14 Felder zu ermitteln, von welcher Seite (Weiß oder Schwarz) sie im Partieverlauf besucht werden können bzw. müssen. Man erhält das folgende Ergebnis:

Felder für Schwarz: g2, a6

Felder für Weiß: a2, h3

Felder für Weiß oder Schwarz: f2, g3, d4, f4, h4, a5, e5, h5, c7, e8

Bei zehn der 14 Felder sind wir jetzt also noch nicht viel schlauer geworden, aber immerhin wissen wir, dass Weiß sich um a2 und h3 kümmern muss, während der Besuch der beiden Felder g2 und a6 Schwarz zufällt.

- Für das Feld a2 muss Weiß einen der beiden Züge Kb2-a2 oder Ta1-a2 aufwenden.
- Für h3 wird einer der beiden weißen Züge Dg4-h3 oder h2-h4 benötigt.
- Für das Feld a6 muss Schwarz einen der beiden Züge Tb6-a6 oder a7-a5 ausführen.
- Für g2 ist schließlich einer der beiden schwarzen Züge Kh2-g2 oder Le4-g2 erforderlich.

Insbesondere das letzte Ergebnis (g2) bringt uns nun weiter: Für den Läuferzug Le4-g2 ist die sechszügige Wanderung La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2 erforderlich, und für den Königszug Kh2-g2 bräuchten wir sogar den 13-zügigen Königsmarsch Kc8-b8-c7-d7-e8-f7-g6-f5-e4-f3-f2-g1-h2-g2. In beiden Fällen besucht dabei übrigens die jeweilige schwarze Figur (Läufer oder König) unterwegs das Feld e8, so dass wir dieses Feld gedanklich abhaken dürfen – es wird quasi zwangsläufig zusammen mit g2

erledigt. Vor allem aber stellen wir fest, dass die Anzahl der Züge, die Schwarz in der Partie mindestens benötigt, weiter zugenommen hat. Wir zählen sie durch:

- 21 zwingend erforderliche Züge (s.o.),
- mindestens sechs zusätzliche Züge für das Feld g2,
- mindestens ein zusätzlicher Zug für a6,
- mindestens drei Züge, um einen sT nach b6 zu bringen (am schnellsten: Th7-d7-d6-b6).

Zusammen haben wir also schon mindestens 31 Züge für Schwarz gefunden. Die analoge Zählung für Weiß fällt wesentlich sparsamer aus:

- 12 zwingend erforderliche Züge,
- mindestens ein weiterer Zug für das Feld a2,
- ein weiterer Zug für das Feld h3,
- mindestens ein Zug, um einen wT nach b1 zu bringen (z.B. durch Ta1-b1).

Mehr als diese 15 Züge haben wir für Weiß noch nicht hergeleitet. Wir wissen also zwar bereits, dass die Lösung mindestens 31,0 Züge umfassen muss; doch davon ist die Hälfte der weißen Züge noch komplett unverplant.

Es ist deshalb nun eine naheliegende Idee, der schwarzen Seite keine zusätzlichen Aufgaben mehr aufzubürden. Alle noch offenen Felder (f2, g3, d4, f4, h4, a5, e5, h5, c7) sollten im Partieverlauf nach Möglichkeit von Weiß besucht werden; außerdem entlastet Weiß den Schwarzen von der Verpflichtung, das Feld d8 für die Rochade zu räumen, indem Weiß auf d8 schlägt. Weiterhin wählen wir für die Manöver von Schwarz überall jeweils die Möglichkeit, die die wenigsten Züge verbraucht. Wir treffen also nun für die weitere Untersuchung die folgenden – vorläufigen – Annahmen:

(A1) Schwarz besucht das Feld g2 mit dem Läufer (Le4-g2).

(A2) Schwarz besucht das Feld a6 durch den Bauernzug a7-a5.

(A3) Schwarz bewegt den sT von h7 aus in drei Zügen nach b6 (Th7-d7-d6-b6).

(A4) In der Partie erfolgt der Schlag wLh4xDd8.

(A5) Alle noch fehlenden Felder werden von Weiß besucht.

Die Annahme (A1) liefert für Schwarz die sechs Läuferzüge La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2. Sie erledigt das Feld g2 und nebenbei auch das Feld e8 (wie bereits weiter oben angemerkt) und das Feld h5.

Die Annahme (A2) besucht neben a6 auch noch das Feld a5.

Die Annahme (A3) hat vorläufig keine weiteren Konsequenzen oder Nebeneffekte.

Die Annahme (A4) erfordert das vierzügige weiße Läufermanöver Le3-g5-h4-d8-a5. Dadurch werden nebenbei die drei Felder f4, h4 und c7 abgearbeitet. Da die sD auf ihrem Ursprungsfeld geschlagen wird, steht außerdem auch nicht mehr der Damenzug sDc7-h2 zur Verfügung. Um dem wK den Zutritt zum Feld h2 zu ermöglichen, benötigen wir deshalb jetzt den weißen Bauernzug h2-h4, der nebenbei das Feld h3 besucht.

Von der Liste der noch nicht besuchten Felder konnten wir nun also einige streichen: g2, a6, h3, f4, h4, a5, h5, c7, e8. Über das Feld a2 wissen wir bereits, dass Weiß es durch einen der beiden Züge Ta1-a2 oder Kb2-a2 besucht. Die Annahme (A5) entfaltet ihre Wirkung deshalb nur noch für die vier Felder f2, g3, d4 und e5.

Weiß kann das Feld f2 nur durch den Zug Kg3-f2 besuchen. Wir erhalten für unsere Partie die zusätzlichen Züge Kh2-g3-f2 und f2-f3. Das Feld g3 ist damit gleich mit erledigt.

Das Feld d4 kann Weiß nur durch d2-d4 besuchen.

Für den Besuch des Feldes e5 stehen Weiß grundsätzlich die drei Züge e4-e5, Te1-e6 und Te6-e4 zur Verfügung. Zur Vorbereitung von Te6-e4 müsste allerdings bereits Te1-e6 geschehen, so dass wir auf jeden Fall einen der beiden Züge e4-e5 oder Te1-e6 benötigen. Der Zug e4-e5 wirkt natürlicher, aber den Zug Te1-e6 (ohne vorheriges e4-e5) können wir zu diesem Zeitpunkt noch nicht vollständig ausschließen – und das müssen wir auch nicht. Es reicht aus, zu wissen, dass Weiß einen Zug für das Feld e5 benötigt.

Wir haben nun für jedes der 60 Felder einen grundsätzlichen Plan, wie wir es besuchen wollen. Unter Berücksichtigung der Annahmen (A1) bis (A5) haben wir die folgenden Züge für unsere angestrebte Lösung hergeleitet:

Weiß: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Tf1-e1, Te1-a1, Tb1-h1, Lc1-e3-g5-h4-d8-a5, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, d2-d4, e2-e4, f2-f3, h2-h4 (21 Züge);

Schwarz: O-O-O, Tf8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-b4-b2-c2, Th8-f8, Lc8-d7-a4-e8-h5-g6-f5-e4-g2, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7, a7-a5, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6 (31 Züge).

Zu den 21 Zügen von Weiß kommen noch je ein weitere Zug für das Feld a2 und das Feld e5 sowie ein Turmzug nach b1. Damit sind bisher 24 weiße Züge verplant; sieben sind noch frei.

Die Listen der erforderlichen Züge haben sich mittlerweile so weit konkretisiert, dass sich an dieser Stelle der Versuch lohnt, die Züge tatsächlich zu einer regulären Schachpartie zusammenzusetzen. Dabei stellt sich heraus, dass die Manöver von Weiß und von Schwarz einander nur wenig gegenseitig behindern. Dies liegt einerseits an den vielen freien Zügen, die Weiß noch zur Verfügung stehen, andererseits aber auch an der Natur der Aufgabenstellung: Wir suchen nach einer Partie, die mit den Besuchen auf den 60 Feldern möglichst sparsam umgeht, und so gehören die meisten Felder des Schachbretts entweder zur weißen oder zur schwarzen „Sphäre“. Diese beiden Regionen überschneiden sich nur sporadisch.

Das Zusammenspiel von Weiß und Schwarz stellt uns also vor keine besonderen Probleme – wohl aber das der schwarzen Steine untereinander. Beim Versuch, die gesuchte Partie zu konstruieren, ergeben sich noch ein paar Schwierigkeiten.

- Vor dem Turmzug sTf8-f6 muss der Bauernzug f7-f5 erfolgen, und bevor der Turm dann weiter nach f5 vorrücken kann, muss der sB dieses Feld verlassen. Dies kann glücklicherweise dadurch erreicht werden, dass Weiß den sB schlägt – entweder durch e5xf6 oder durch Ld3-e2-h5-g4-f5. Der Bauernschlag wirkt einfacher, aber auch das Läufermanöver ist noch möglich – es benötigt lediglich drei Züge mehr. Wir brauchen uns an dieser Stelle noch nicht zu entscheiden, welcher der beiden Schlagmöglichkeiten wir den Vorzug gewähren.
- Vor der Turmwanderung von f8 bis nach c2 hat Schwarz bereits Lf8-b4 gezogen, und dieser sL steht nun dem Turmzug Tb6-b4 im Weg. Auch hier kann glücklicherweise Weiß helfen, da ihm der Bauernschlag a3xb4 zur Verfügung steht. Es ist also nicht erforderlich, dass der sL ein zweites Mal zieht.
- Vor der schwarzen Rochade O-O-O geschieht bereits der Zug sSb8-c6; andererseits kann der Läuferzug sLa4-e8 erst nach der Rochade erfolgen. Der Sc6 steht damit dem Läufer im Weg, und an dieser Stelle kann Weiß nun leider nicht unterstützen. Wir benötigen einen weiteren Zug des sS (entweder Sc6-a5 oder Sc6-e7). Die Partie umfasst jetzt schon mindestens 32,0 Züge.

- Der sT, der von f8 bis nach c2 wandert, muss zuvor nach f8 gekommen sein, und mit dem bisher notierten Zügematerial ist dies nur durch Th8-f8 möglich. Vor Th8-f8 muss aber bereits Sg8-e7 geschehen. Der sSe7 steht nun dem Turmzug Th7-d7 im Weg. Auch hier kann Weiß nicht unterstützen – wir benötigen einen weiteren Zug des sSe7 (entweder Se7-f5 oder Se7-g6). Damit umfasst die Partie jetzt schon 33,0 Züge.

Mit 33,0 Zügen ist die Forderung der Aufgabenstellung nun tatsächlich erfüllbar. Der schwarze Königsspringer steht zwar auf f5 oder g6 der Wanderung des sL von a4 bis nach g2 im Weg, aber hier kann Weiß wieder helfen: Wir stellen den sS nach f5 und schlagen ihn dort durch das Manöver Ld3-e2-h5-g4-f5. Die nachstehende Partie ist die erste, die ich im Prozess der Lösungsfindung konkret als mögliche Kandidatin für die Einreichung im Wettbewerb notiert habe:

1. d4 e6 2. Le3 Lb4+ 3. Sc3 c5 4. Lg5 c4 5. Lh4 a5 6. Lxd8 Se7 7. Lxa5 Tf8 8. e4 d5 9. e5 f5 10. exf6 Txf6 11. Ld3 Tf5 12. Le2 Tf7 13. Lh5 Sf5 14. Lg4 g5 15. Lxf5 h6 16. Dg4 Ld7 17. Sf3 La4 18. O-O Th7 19. h4 Td7 20. Kh2 Td6 21. a3 Tb6 22. axb4 Sc6 23. Ta2 O-O-O 24. Te1 Se7 25. Tea1 Le8 26. Tb1 Lh5 27. Th1 Lg6 28. Sd2 Lxf5 29. f3 Le4 30. f4 Lxg2 31. Kg3 Txb4 32. Kf2 Txb2 33. h5 Txc2.

Nachdem wir damit nun Gewissheit erlangt haben, dass es eine Lösung gibt, die mit 33,0 Zügen auskommt, ist es nachträglich nicht mehr schwierig, die obigen Annahmen (A1) bis (A5) auch formell zu beweisen. Dies geschieht detailliert im Rahmen des obigen Beweises. Damit ist dann auch klar, dass die Zügezahl 33,0 die geringstmögliche ist, die man erreichen kann. Die zuletzt notierte Partie ist somit ein Beispiel für eine Partie kürzester Länge.

Im nächsten Schritt geht es um die sekundäre Forderung der Aufgabenstellung: Wir wollen unter allen Lösungen, die mit 33,0 Zügen auskommen, diejenigen identifizieren, die in möglichst wenigen Zügen bereits die ersten 59 Felder besuchen. Wir müssen uns dazu einen möglichst genauen Überblick über alle möglichen Lösungen mit 33,0 Zügen verschaffen. Zum Glück ist dies nicht allzu schwierig, weil wir zumindest die 33 Züge von Schwarz bereits gut kennen: Immerhin 31 der 33 Züge sind exakt bekannt, und hinzu kommen noch je ein Zug des Damenspringers und des Königsspringers.

Der aufmerksame Leser hat bemerkt, dass die letzte Teilaussage falsch war. Es muss nach Sg8-e7 keineswegs in der Partie noch einen zweiten Zug des Königsspringers geben. Dieses „Resultat“ war in den vorigen Überlegungen unter der impliziten Voraussetzung hergeleitet worden, dass es der schwarze Königsturm ist, der von f8 bis nach c2 wandert. Diese Wanderung kann aber auch vom Damenturm ausgeführt werden, und dann haben wir in der Partie anstelle des zweiten Zugs des Königsspringers den Turmzug Td8-f8. Diese Möglichkeit habe ich im Lösungsprozess lange übersehen – ich bemerkte sie erst, als ich begann, den Beweis für die Optimalität meiner Lösung sauber auszuformulieren. Dadurch war ich gezwungen, die logischen Gedankengänge nochmals genau nachzuvollziehen – und plötzlich offenbarte sich die Möglichkeit Td8-f8.

Der weitere Gedankengang ist nun nicht mehr schwierig und wird im obigen Beweis bereits weitgehend nachgezeichnet. Es ist zu prüfen, welche Felder für den letzten (60.) Besuch der Partie in Frage kommen – dies sind die Felder c2, g2, c4 und g8. Das Feld g2 genießt unter diesen vier Feldern eine Sonderstellung, weil es es uns ermöglicht, bis zu sechs schwarze Läuferzüge zurückzunehmen, ohne dadurch eines der drei anderen Felder c2, c4, g8 aufzugeben. Allerdings verliert der sL im Rückwärtsspiel unterwegs die Felder h5 und (potenziell) e8. Der Verlust von h5 lässt sich dadurch ausgleichen, dass wir den weißen Bauernzug h4-h5 in die Partie einbeziehen. Der Verlust von e8 lässt sich jedoch nur dadurch verhindern, dass wir die Variante mit Td8-f8 wählen (also ohne zweiten Zug des schwarzen Königsspringers). Nun ermittelt man 28 weiße Züge, die für den Besuch der ersten 59 Felder zwingend erforderlich sind, und hat damit den Wert  $z(59) = 27,5$  bestimmt. Außerdem sind die ersten 55 Einzelzüge der Partie bis auf die Reihenfolge komplett bekannt. Die weitere Optimierung

der Zugreihfolge im Hinblick auf die nachgelagerten Kriterien  $z(58)$ ,  $z(57)$ ,... ist schließlich eine reine Fleißarbeit, bei der es lediglich auf ein wenig Sorgfalt ankommt.

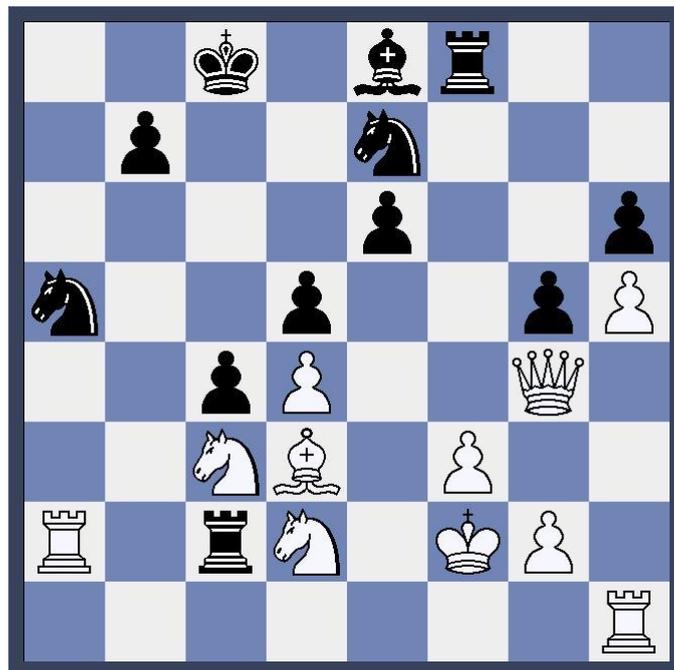
## 7. Anhang A: Bestimmung aller optimalen Lösungen

In diesem Anhang soll die Gesamtheit aller optimalen Lösungen der Aufgabenstellung ermittelt werden, und damit insbesondere deren Anzahl.

Wir wissen bereits, dass die Zugfolge der 33 schwarzen Züge bis auf zwei mögliche Vertauschungen im 12./13. Zug und im 24./25. Zug eindeutig feststeht. Es gibt damit vier verschiedene schwarze Zugfolgen, die in optimalen Partien auftreten können. Die Zugreihenfolge in den beiden Pärchen im 12./13. Zug und im 24./25. Zug ist jeweils komplett frei, d.h. sie hängt nicht von den weißen Manövern ab.

Bei Weiß kennen wir ebenfalls ein Zugpaar mit frei wählbarer Reihenfolge im 10./11. Zug. Im 13./14./16./17. Zug gibt es eine Gruppe von vier Zügen mit insgesamt sechs möglichen Anordnungen. Im 20./21./23. Zug haben wir drei Züge mit drei möglichen Anordnungen. Für die gesamte Partie mit Ausnahme der letzten fünf weißen Züge gibt es damit  $4 * 2 * 6 * 3 = 144$  verschiedene Kombinationen der Zugreihenfolge.

Wir wollen nun noch die möglichen Zugfolgen für die letzten fünf Züge von Weiß bestimmen. Nach dem 28. Zug von Schwarz steht die folgende Stellung auf dem Brett:



In den verbleibenden fünf Zügen der Partie wird Schwarz fünfmal den Läufer bewegen: 29... Le8-h5, 30... Lh5-g6, 31... Lg6-f5, 32... Lf5-e4, 33... Le4-g2. Weiß ist in der Auswahl der fünf Züge noch frei, muss allerdings den Zug f3-f4 in dieser Partiephase unterbringen.

Die fünf weißen Züge müssen natürlich von den elf Steinen ausgeführt werden, die noch auf dem Brett verblieben sind. Züge des Sc3 und des Bh5 scheiden allerdings aus, weil für diese beiden Steine aus der Partie *CarCar* keine weiteren Züge zur Verfügung stehen. Auch der Bd4 kann nicht ziehen: Gemäß *CarCar* käme hierfür nur der Zug d4-d5 in Frage, aber da der sBd5 sich selbst nicht bewegt, müsste dieser zuvor geschlagen werden, was kein weißer Zug aus der Partie *CarCar* leisten kann. Also

kommen für die letzten fünf Züge von Weiß nur die acht Steine Kf2, Dg4, Ta2, Th1, Ld3, Sd2, Bf3 und Bg2 in Frage.

Bei sechs dieser acht Steine (nämlich allen außer den beiden Türmen) sind die verfügbaren Zugmöglichkeiten recht übersichtlich.

- Der Bg2 kann den Zug g2-g3 ausführen. Danach ist kein weiterer Zug mehr möglich: Gemäß *CarCar* käme von g3 aus nur der Zug g3xh4 in Frage, doch auf h4 findet der wB in der vorliegenden Partie kein schwarzes Schlagopfer.
- Der Kf2 kann den Zug Kf2-e3 ausführen. Auch für ihn ist danach kein weiterer Zug möglich: Gemäß *CarCar* müsste von e3 aus der Zug Ke3-d2 geschehen, aber das Feld d2 darf der wK in der vorliegenden Partie wegen des sTc2 nicht betreten. Der sT verlässt das Feld c2 nicht selbst, und für einen Schlag des sTc2 käme aus der Partie *CarCar* nur der Zug Kd2-c2 in Frage – was natürlich nicht geht.
- Die Dg4 hat den Zug Dg4-h3 und daran anschließend Dh3-h2. Von h2 aus geht es nicht weiter.
- Der Sd2 hat den Zug Sd2-f1 (sofern zuvor die Fesselung auf der 2. Reihe aufgehoben wird) und kann danach auch noch Sf1-e3 anschließen. Von e3 geht es nicht weiter.
- Der Bf3 hat den Zug f3-f4 (der sogar zwingend vorkommen muss) und kann danach f4-f5 und sogar auch noch f5-f6 anschließen.
- Der Ld3 hat den Zug Ld3-e2 und dann anschließend Le2-h5 (sofern Bf3 und Dg4 hierfür die Diagonale räumen), und danach ist auch noch Lh5-g4 möglich. Ein vierter Zug des wL kann nicht geschehen, weil mit Ld3-e2-h5-g4, f3-f4 und Dg4-h3 alle fünf weißen Züge verbraucht sind. Der Zug Le2-h5 kollidiert auf h5 weder mit wB noch mit sL, weil Le2-h5 nur nach vorbereitendem Ld3-e2, f3-f4 und Dg4-h3 möglich ist und damit frühestens im 32. Zug – aber der sL schlägt bereits im 29. Zug auf h5 und verlässt dieses Feld im 30. Zug wieder.

Den sechs bisher betrachteten Steinen steht also jeweils nur eine einzige Zugfolge zur Verfügung, die ganz oder teilweise (oder überhaupt nicht) genutzt werden kann. Bei zwei Steinen (Bg2, Kf2) ist es nur ein einziger Zug, bei zwei Steinen (Dg4, Sd2) sind es je zwei Züge und bei den beiden übrigen Steinen (Bf3, Ld3) je drei Züge.

Für die Manöver der beiden Türme bestehen mehrere Varianten, aber immerhin ist der Einstieg jeweils eindeutig.

- Der Ta2 kann von a2 aus nur den Zug Ta2-b2 ausführen. Von b2 aus geht es mit Tb2-b1 weiter. Auf dem Feld b1 bestehen dann für einen dritten Zug die beiden Möglichkeiten Tb1-b6 und Tb1-e1. Der Zug Tb1-h1, der gemäß der Partie *CarCar* ebenfalls erlaubt wäre, scheidet an dieser Stelle aus: Vor Tb1-h1 müsste zuerst der andere wT das Feld h1 verlassen, was nur durch Th1-b1 möglich wäre; und damit wären dann alle fünf verfügbaren weißen Züge verbraucht (dreimal Ta2, einmal Th1, einmal Bf3); Doch auch auf dem Feld b1 würde der wTh1 (nach Th1-b1) immer noch die Wanderung des Ta2 nach h1 verhindern. Also kann der Ta2 in seinem dritten Zug nur nach b6 oder e1 gelangen. Von b6 aus geht es dann nicht weiter. Von e1 aus hingegen gibt es gleich fünf Möglichkeiten für einen vierten Zug: Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Te1-e3 und Te1-e6. Mehr als vier Züge kann der wT nicht ausführen, da wir einen der fünf letzten weißen Züge ja für f3-f4 reservieren müssen.
- Der Th1 hat von h1 aus ebenfalls nur einen einzigen Zug, nämlich Th1-b1. Für einen zweiten Zug bestehen von b1 aus drei Zugmöglichkeiten: Tb1-b6, Tb1-e1 und Tb1-h1. Auf b6 ist dann wieder Schluss; aber von e1 und h1 aus kann es noch weitergehen.
  - o Nach Th1-b1-h1 kommt als dritter Zug nochmals Th1-b1 in Frage und danach als vierter Zug wiederum Tb1-b6, Tb1-e1 und Tb1-h1.

- Nach Th1-b1-e1 gibt es fünf Möglichkeiten für einen dritten Zug: Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Te1-e3, Te1-e6. Und in vier dieser fünf Fälle kann sich dann noch ein vierter Zug anschließen:
  - Nach Th1-b1-e1-a1 kann Ta1-b1 geschehen – nicht jedoch Ta1-a2, weil auf a2 der andere wT steht.
  - Nach Th1-b1-e1-b1 ist Tb1-b6, Tb1-e1 und Tb1-h1 möglich.
  - Nach Th1-b1-e1-e2 gibt es die Varianten Te2-e1 und Te2-e3.
  - Nach Th1-b1-e1-e3 bestehen die Möglichkeiten Te3-e1 und Te3-e2.

Im Fall von Th1-b1-e1-e6 gibt es für den wT hingegen keine Möglichkeit für einen vierten Zug. Anhand der Partie *CarCar* wäre zwar grundsätzlich noch Te6-e4 denkbar; aber dieses Manöver würde nicht mit der Wanderung des sL nach g2 zusammenpassen. Der Zug Te6-e4 wäre der vierte Zug des wTh1, er könnte also frühestens im 32. Zug der Partie geschehen. Im Fall von 32. Te6-e4 wäre dann der sL auf dem Feld f5 gefesselt (zwischen wDg4 und sKc8) und könnte nicht mehr den nun anstehenden Zug 32... Lf5-e4 ausführen. Und im Fall von 33. Te6xe4 schlänge der wT den sL und würde dadurch 33... Le4-g2 verhindern.

Mehr als vier Züge des wT sind auch hier wieder nicht möglich.

Wir haben damit nun den Vorrat an Zügen bestimmt, aus denen sich Weiß in den letzten fünf Zügen der Partie bedienen kann. Wir notieren hier nochmals alle diese Züge:

Kf2 (1 Zug): Kf2-e3

Dg4 (2 Züge): Dg4-h3, Dh3-h2

Ta2 (9 Züge): Ta2-b2, Tb2-b1, Tb1-b6, Tb1-e1, Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Te1-e3, Te1-e6

Th1 (14 Züge): Th1-b1, Tb1-b6, Tb1-e1, Tb1-h1, Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Te1-e3, Te1-e6, Ta1-b1, Te2-e1, Te2-e3, Te3-e1, Te3-e2

Ld3 (3 Züge): Ld3-e2, Le2-h5, Lh5-g4

Sd2 (2 Züge): Sd2-f1, Sf1-e3

Bf3 (3 Züge): f3-f4, f4-f5, f5-f6

Bg2 (1 Zug): g2-g3

Der Zug f3-f4 muss in der Partie vorkommen, nur seine Position in der Reihenfolge ist noch unklar. Der Th1 kann in einer drei- oder vierzügigen Zugfolge einen oder zwei seiner Züge Th1-b1, Tb1-e1, Tb1-h1 sogar doppelt verwenden. Die sieben Züge Tb1-b6, Tb1-e1, Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Te1-e3, Te1-e6 stehen beiden Türmen zur Verfügung – wobei es aber offenbar nicht vorkommen kann, dass beide Türme den gleichen Zug innerhalb der Schlussphase derselben Partie ausführen. Wenn wir diese sieben Züge jeweils nur einfach zählen und außerdem den zwingend erforderlichen Zug f3-f4 weglassen, so haben wir somit 27 verschiedene Züge, aus denen die vier offenen weißen Züge für die Schlussphase ausgewählt werden müssen (mit eventueller doppelter Verwendung von Th1-b1, Tb1-e1 oder Tb1-h1).

Zwischen den Manövern der acht weißen Steine und des schwarzen Läufers bestehen in der Schlussphase der Partie nun noch einige wechselseitige Abhängigkeiten:

- (1) Der Bauernzug f4-f5 ist nicht im 32. Zug möglich, weil nach 31... Lg6-f5 das Feld f5 besetzt ist.
- (2) Der Bauernzug f5-f6 ist nicht im 33. Zug möglich, weil der wB dafür zuvor bereits vor 31... Lg6-f5 bis nach f5 vorrücken müsste, und dann würde er auf f5 geschlagen. Natürlich ist f5-f6 auch nicht im 32. Zug möglich (wegen des sLf5). Der Zug f5-f6 kann damit nur im 31. Zug geschehen, nach vorherigem 29. f3-f4 und 30. f4-f5.
- (3) Wenn der Bf3 vor dem 32. Zug bis nach f5 vorrückt (durch f3-f4 und f4-f5), ohne dass sich daran 31. f5-f6 anschließt, so wird dieser wB auf f5 vom sL geschlagen. Durch 32... Lf5-e4 öffnet sich dann die Wirkungslinie des sTf8 in Richtung auf das Feld f2. Da der sTf8 sich nicht bewegt und auch kein anderer Stein die Felder f2-f8 betreten kann, darf der wK dann nicht auf f2 stehen bleiben. In diesem Fall muss also der Zug Kf2-e3 in der Partie vorkommen (spätestens im 33. Zug als Antwort auf das Abzugsschach).
- (4) Der Turmzug Te1-e6 ist nicht im 33. Zug möglich, weil nach 32... Lf5-e4 der sLe4 die e-Linie blockiert.
- (5) Die beiden Züge Kf2-e3 und Sf1-e3 können nicht gleichzeitig in der Partie vorkommen, weil jede der beiden Figuren bis zum Partieende auf dem Feld e3 verbleiben müsste.
- (6) Der Zug Le2-h5 ist nur in Verbindung mit Dg4-h3 möglich, und zwar müssen die beiden Züge f3-f4 und Dg4-h5 (und natürlich auch Ld3-e2) in der Partie vor Le2-h5 geschehen.
- (7) Der Zug Sd2-f1 ist nur möglich, wenn zuvor die Fesselung auf der zweiten Reihe aufgehoben wird. Dies kann durch Te1-e2, Ld3-e2 oder Kf2-e3 geschehen. (Der Zug Te3-e2 geht nicht, weil dann durch das Manöver Th1-b1-e1-e3-e2 bereits alle freien weißen Züge aufgebraucht wären.)
- (8) Wenn der Zug Sd2-f1 gemeinsam mit dem Zug Th1-b1 in der Partie vorkommt, dann muss entweder der Turmzug bereits vor Sd2-f1 geschehen, oder aber der wS verlässt das Feld f1 wieder durch Sf1-e3, bevor Th1-b1 erfolgt.
- (9) Wenn der Zug Sd2-f1 gemeinsam mit dem zweizügigen Manöver Th1-b1-h1 in der Partie vorkommt, so ist Sf1-e3 nicht möglich, weil dafür nicht mehr genug Züge zur Verfügung stünden. In diesem Fall muss dann Th1-b1-h1 vor Sd2-f1 gespielt werden.
- (10) Wenn der Zug Te1-e3 oder der Zug Te1-e6 gemeinsam mit Kf2-e3 oder mit Ld3-e2 in der Partie vorkommt, so muss der Turmzug im Partieverlauf vor dem Königs- oder Läuferzug erfolgen. Denn da in diesem Fall das Turmmanöver drei Züge benötigt, steht kein Zug mehr zur Verfügung, um den wL durch Le2-h5 wieder von der e-Linie wegzubewegen.
- (11) Die Züge Te1-e2 und Ld3-e2 können nicht gemeinsam in der Partie vorkommen, weil kein Zug mehr zur Verfügung stünde, in dem die erste der beiden Figuren das Feld für die zweite Figur wieder räumt.
- (12) Wenn der Ta2 genau einmal zieht (Ta2-b2) und der Th1 das zweizügige Manöver Th1-b1-b6 ausführt, so muss der Zug Tb1-b6 vor Ta2-b2 geschehen.
- (13) Wenn der Ta2 genau zweimal zieht (Ta2-b2-b1), so kann der Th1 nicht genau einmal ziehen – denn dann stünden beide wTT am Ende der Partie auf b1. Zweizügige Manöver des Th1 sind hingegen möglich. Im Fall von Th1-b1-b6 müssen beide Züge Th1-b1-b6 im Partieverlauf vor den beiden Zügen Ta2-b2-b1 geschehen. Im Fall von Th1-b1-e1 oder Th1-b1-h1 müssen beide Züge des Th1 vor Tb2-b1 erfolgen.
- (14) Wenn der Ta2 das dreizügige Manöver Ta2-b2-b1-b6 ausführt und gleichzeitig der Zug Th1-b1 des Th1 vorkommt, so müssen die drei Züge Ta2-b1-b1-b6 im Partieverlauf vor Th1-b1 erfolgen.
- (15) Wenn der Ta2 das dreizügige Manöver Ta2-b2-b1-e1 ausführt, so kann der Zug Th1-b1 des Th1 in der Partie nicht vorkommen.

Für die Unterscheidung der verschiedenen Fälle ziehen wir im Folgenden in erster Linie die Manöver des Sd2 und des Bf3 heran.

Im Zusammenhang mit dem Sd2 unterscheiden wir die folgenden Fälle:

- [S1] Der Sd2 zieht in der Partie noch zweimal.
- [S2] Der Sd2 zieht in der Partie noch genau einmal, und es kommt das Turmmanöver Th1-b1-e1-e2 vor.
- [S3] Der Sd2 zieht in der Partie noch genau einmal, und es kommen beide Züge Kf2-e3 und Ld3-e2 vor.
- [S4] Der Sd2 zieht in der Partie noch genau einmal, und es kommt genau einer der beiden Züge Kf2-e3 oder Ld3-e2 vor.
- [S5] Der Sd2 bleibt bis zum Ende der Partie auf d2 stehen.

Diese fünf Fälle bilden eine vollständige Ereignisdisjunktion, d.h. sie umfassen alle Möglichkeiten für die Schlussphase der Partie und sind außerdem paarweise miteinander unvereinbar. Dass stets einer der fünf Fälle [S1]-[S5] vorliegen muss, folgt dabei direkt aus der Aussage (7) von oben. Der Fall [S2] ist mit den Fällen [S3] und [S4] unvereinbar, weil wir sonst (unter Berücksichtigung von f3-f4) in der Schlussphase der Partie mehr als fünf weiße Züge hätten.

Im Fall [S1] ist zu beachten, dass wegen (5) der Zug Kf2-e3 nicht in der Partie vorkommen kann, ebensowenig wie das Turmmanöver Th1-b1-e1-e2 (zu viele Züge). Wegen (7) benötigen wir im Fall [S1] deshalb den Läuferzug Ld3-e2, und dieser muss im Partieverlauf vor Sd2-f1-e3 stattfinden.

Im Fall [S2] findet das Turmmanöver Th1-b1-e1-e2 im Partieverlauf vor Sd2-f1 statt.

Im Fall [S3] muss der frühere der beiden Züge Kf2-e3 und Ld3-e2 vor Sd2-f1 geschehen.

Im Fall [S4] muss der Zug Kf2-e3 oder Ld3-e2 im Partieverlauf vor Sd2-f1 erfolgen. Wir bezeichnen den jeweils auftretenden Zug (Kf2-e3 oder Ld3-e2) in diesem Zusammenhang als „Entfesselungszug“.

Im Zusammenhang mit dem Bf3 unterscheiden wir weiterhin die folgenden Fälle:

- [B1] Der Bf3 zieht in der Partie noch dreimal.
- [B2] Der Bf3 zieht in der Partie noch zweimal und wird auf f5 geschlagen.
- [B3] Der Bf3 zieht in der Partie noch genau zweimal und wird nicht auf f5 geschlagen.
- [B4] Der Bf3 zieht in der Partie noch genau einmal.

Da der Zug f3-f4 in der Partie vorkommen muss, liegt immer einer dieser vier Fälle vor, d.h. auch die vier Fälle [B1]-[B4] bilden eine vollständige Ereignisdisjunktion.

Im Fall [B1] folgt aus (2), dass wir in der Partie die drei Züge 29. f3-f4, 30. f4-f5 und 31. f5-f6 haben.

Im Fall [B2] ergibt sich aus (1) und (3), dass die beiden Züge f3-f4 und f4-f5 im 29.-31. Zug der Partie stattfinden müssen. Außerdem muss in der Partie der Zug Kf2-e3 vorkommen.

Im Fall [B3] muss der Zug f4-f5 im 33. Zug geschehen.

Aus den fünf Fällen [S1]-[S5] und den vier Fällen [B1]-[B4] lassen sich nun 20 verschiedene Kombinationen bilden, die wir mit [S1B1], [S1B2] etc. bezeichnen. Nicht jede dieser Kombinationen ist allerdings tatsächlich in einer Partie umsetzbar – die folgenden sechs scheiden aus:

- [S1B1] geht nicht, weil im Fall [S1] die drei Züge Ld3-e2, Sd2-f1 und Sf1-e3 vorkommen müssen und deshalb keine drei Züge mehr für den Bf3 zur Verfügung stehen.
- [S1B2] ist nicht möglich, weil dann der wS und der wK auf dem Feld e3 kollidieren.
- [S2B1], [S2B2] und [S2B3] sind sämtlich nicht möglich, weil im Fall [S2] Springer und Turm zusammen bereits viermal ziehen und damit nur noch ein Zug für den Bf3 übrig bleibt.

- [S3B1] geht nicht, weil die drei Züge Sd2-f1, Ld3-e2 und Kf2-e3 nur noch zwei Züge für den Bf3 übrig lassen.

Es bleiben somit nun 14 Kombinationen der Fälle [S1]-[S5] und [B1]-[B4] zu untersuchen.

	[B1]	[B2]	[B3]	[B4]
[S1]	---	---	[S1B3]	[S1B4]
[S2]	---	---	---	[S2B4]
[S3]	---	[S3B2]	[S3B3]	[S3B4]
[S4]	[S4B1]	[S4B2]	[S4B3]	[S4B4]
[S5]	[S5B1]	[S5B2]	[S5B3]	[S5B4]

Im Folgenden betrachten wir diese 14 Kombinationen jeweils separat.

### **7.1. Fall [S1B3]**

Die fünf Züge der Schlussphase der Partie sind in diesem Fall vollständig bekannt: Einerseits haben wir die drei Züge Ld3-e2, Sd2-f1 und Sf1-e3, die genau in dieser Reihenfolge stattfinden müssen, und andererseits die beiden Züge f3-f4 und f4-f5, die natürlich ebenfalls in dieser Reihenfolge geschehen. Außerdem findet der Zug f4-f5 im 33. Zug statt. Der Zug f3-f4 kann an beliebiger Stelle in den vier Zügen Nr. 29-32 untergebracht werden, und damit steht dann die Reihenfolge der fünf Züge insgesamt fest. Im Fall [S1B3] gibt es also genau vier Verläufe für die Schlussphase der Partie.

### **7.2. Fall [S1B4]**

Wieder haben wir die drei Züge Ld3-e2, Sd2-f1 und Sf1-e3, die genau in dieser Reihenfolge stattfinden. Hinzu tritt der Zug f3-f4 und noch ein weiterer Zug. Für den letzten offenen Zug scheidet Kf2-e3 aus (wegen Fall [S1]), außerdem f4-f5 (wegen Fall [B4]) sowie auch Le2-h5 wegen (6). Es bleiben Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1 und g2-g3 als Möglichkeiten übrig.

- Im Fall von Th1-b1 muss dieser Zug entweder vor Sd2-f1 oder nach Sf1-e3 stattfinden, er kann also an drei Stellen in die Zugfolge aus Ld3-e2, Sd2-f1, Sf1-e3 eingebaut werden. Für den Zug f3-f4 gibt es dann noch fünf verschiedene Positionen im Ablauf. In diesem Fall erhalten wir damit  $3 * 5 = 15$  verschiedene Verläufe für die Schlussphase der Partie.
- Im Fall von Dg4-h3, Ta2-b2 oder g2-g3 gibt es keine Einschränkungen für die relative Position dieses Zuges im Ablauf im Verhältnis zu der Zugfolge aus Ld3-e2, Sd2-f1, Sf1-e3. Der letzte offene Zug kann also auf vier Arten in die genannte Zugfolge eingebaut werden. Für den Zug f3-f4 gibt es wieder fünf verschiedene Positionen im Ablauf. Da wir für den letzten offenen Zug hier außerdem drei Wahlmöglichkeiten haben, erhalten wir in diesem Fall  $3 * 4 * 5 = 60$  Verläufe.

Im Fall [S1B4] gibt es damit insgesamt  $15 + 60 = 75$  Verläufe.

### **7.3. Fall [S2B4]**

Die fünf Züge stehen fest, außerdem haben wir die vierzügige Zugfolge Th1-b1, Tb1-e1, Te1-e2, Sd2-f1, die genau in dieser Reihenfolge geschehen muss. Für den Bauernzug f3-f4 gibt es fünf Möglichkeiten, ihn in die Reihenfolge einzubauen. Damit gibt es im Fall [S2B4] fünf Verläufe.

### **7.4. Fall [S3B2]**

Wieder stehen die fünf Züge fest: Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2, f3-f4 und f4-f5. Von den drei Zügen Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2 darf Sd2-f1 im Partieverlauf nicht der erste sein, deshalb gibt es für diese drei Züge vier verschiedene Anordnungen. Die beiden Züge f3-f4 und f4-f5 müssen in den Zügen Nr. 29-31 der Partie gespielt werden; es gibt drei Möglichkeiten, um sie auf diese drei Züge zu verteilen. Die anderen drei Züge werden dann in beliebiger Reihenfolge auf die verbleibenden drei Zugnummern verteilt. Damit ergeben sich in diesem Fall  $3 * 4 = 12$  Verläufe.

### **7.5. Fall [S3B3]**

Auch hier stehen die fünf Züge fest: Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2, f3-f4 und f4-f5. Für die drei Züge Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2 gibt es wieder vier Anordnungen. Der Zug f4-f5 geschieht im 33. Zug. Der Zug f3-f4 kann davor an einer beliebigen der vier Zugnummern 29-32 untergebracht werden, und die übrigen drei Züge verteilen sich dann auf die verbleibenden Zugnummern. Es ergeben sich  $4 * 4 = 16$  Verläufe.

### **7.6. Fall [S3B4]**

Diesmal haben wir die drei Züge Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2, die untereinander auf vier Arten angeordnet werden können, und dazu den Zug f3-f4 und noch einen weiteren Zug. Für den letzten offenen Zug scheidet Le2-h5 aus (wegen (6)) und auch Sf1-e3 (Fall [S3]). Es bleiben Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1 und g2-g3 übrig.

- Im Fall von Th1-b1 muss dieser Zug vor Sd2-f1 erfolgen. Unter den vier Anordnungen der drei Züge Sd2-f1, Kf2-e3, Ld3-e2 gibt es zwei, in denen der Zug Sd2-f1 an zweiter Stelle steht, und zwei, in denen der Zug Sd2-f1 an dritter Stelle steht. Im ersteren Fall kann der Zug Th1-b1 an zwei Stellen eingeschoben werden, im letzteren Fall an drei Stellen. Für den Zug f3-f4 gibt es dann jeweils noch fünf verschiedene Positionen im Ablauf. In diesem Fall erhalten wir damit  $(2 * 2 + 2 * 3) * 5 = 50$  Verläufe.
- Im Fall von Dg4-h3, Ta2-b2 oder g2-g3 gibt es keine Einschränkungen für die relative Position dieses Zuges im Ablauf im Verhältnis zu der Zugfolge aus Sd2-f1, Kf2-e3 und Ld3-e2. Der letzte offene Zug kann auf vier Arten in die genannte Zugfolge eingebaut werden. Für den Zug f3-f4 gibt es wieder fünf verschiedene Positionen im Ablauf. Da wir für den letzten offenen Zug hier außerdem drei Wahlmöglichkeiten haben, erhalten wir in diesem Fall  $3 * 4 * 4 * 5 = 240$  Verläufe.

Im Fall [S3B4] gibt es damit insgesamt  $50 + 240 = 290$  Verläufe.

### **7.7. Fall [S4B1]**

Es gibt zwei Möglichkeiten für den Entfesselungszug (Kf2-e3 oder Ld3-e2), und wegen des Falls [B1] haben wir die drei Züge 29. f3-f4 30. f4-f5 31. f5-f6. Der Entfesselungszug muss im Ablauf vor Sd2-f1 erfolgen. Damit gibt es in diesem Fall nur zwei mögliche Verläufe.

### **7.8. Fall [S4B2]**

Wegen des Falls [B2] muss der Zug Kf2-e3 vorkommen, und das ist dann demzufolge der eindeutige Entfesselungszug für den Fall [S4]. Die beiden Züge Kf2-e3 und Sd2-f1 müssen in dieser Reihenfolge geschehen. Außerdem haben wir die beiden Züge f3-f4 und f4-f5, die auf die drei Züge Nr. 29-31 verteilt werden müssen; dafür gibt es drei Möglichkeiten. Ein weißer Zug ist noch frei. Dafür kommen Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1 und g2-g3 in Frage.

- Im Fall von Th1-b1 muss dieser Zug vor Sd2-f1 erfolgen. Für die drei Züge Kf2-e3, Sd2-f1 und Th1-b1 gibt es dann zwei mögliche Anordnungen. Die beiden Züge f3-f4 und f4-f5 werden auf drei Arten auf die Züge Nr. 29-31 verteilt, und die übrigen drei Züge nehmen die drei restlichen Plätze im Ablauf ein. Es ergeben sich  $3 * 2 = 6$  Verläufe.
- Im Fall von Dg4-h3, Ta2-b2 oder g2-g3 gibt es keine Einschränkungen für die relative Position dieses Zuges im Ablauf im Verhältnis zu der Zugfolge aus Kf2-e3 und Sd2-f1. Der letzte offene Zug kann auf drei Arten in die genannte Zugfolge eingebaut werden. Für die beiden Züge f3-f4 und f4-f5 gibt es wieder drei verschiedene Positionen im Ablauf. Wir erhalten  $3 * 3 * 3 = 27$  Verläufe.

Im Fall [S4B2] gibt es damit insgesamt  $6 + 27 = 33$  Verläufe.

### **7.9. Fall [S4B3]**

Wir haben die Züge f3-f4, f4-f5, Sd2-f1 und genau einen Entfesselungszug (Kf2-e3 oder Ld3-e2). Der fünfte weiße Zug ist noch offen. Der Zug f4-f5 geschieht im 33. Zug der Partie. Nach Voraussetzung des Falles [S4] kann der offene Zug nicht der zweite der beiden Entfesselungszüge sein. Falls der Entfesselungszug Ld3-e2 lautet, kann der offene Zug auch nicht der anschließende Zug Le2-h5 sein, weil dafür (gemäß (6)) zusätzlich noch Dg4-h3 benötigt würde. Für den offenen Zug kommen damit die Züge Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1 und g2-g3 in Frage.

- Im Fall von Th1-b1 muss dieser Zug vor Sd2-f1 erfolgen. Für den Entfesselungszug und die beiden Züge Sd2-f1 und Th1-b1 gibt es dann zwei mögliche Anordnungen. Der Zug f3-f4 nimmt eine beliebige Position unter den vier Zügen Nr. 29-32 ein. Da es für den Entfesselungszug zwei Wahlmöglichkeiten gibt, erhalten wir  $2 * 2 * 4 = 16$  Verläufe.
- Im Fall von Dg4-h3, Ta2-b2 oder g2-g3 gibt es keine Einschränkungen für die relative Position dieses Zuges im Ablauf im Verhältnis zu der Zugfolge aus dem Entfesselungszug und Sd2-f1. Der letzte offene Zug kann auf drei Arten in die genannte Zugfolge eingebaut werden. Für den Zug f3-f4 gibt es wieder vier verschiedene Positionen im Ablauf. Wir erhalten  $3 * 2 * 3 * 4 = 72$  Verläufe.

Im Fall [S4B3] gibt es damit insgesamt  $16 + 72 = 88$  Verläufe.

### **7.10. Fall [S4B4]**

Diesmal treten zum Entfesselungszug (Kf2-e3 oder Ld3-e2) und zu Sd2-f1 und f3-f4 noch zwei weitere Züge hinzu. Diese beiden Zügen bezeichnen wir als die Zusatzzüge. Wir unterscheiden zwei Fälle:

- beide Zusatzzüge werden vom gleichen Stein ausgeführt
- die Zusatzzüge werden von zwei verschiedenen Steinen ausgeführt

#### **7.10.1. beide Zusatzzüge vom gleichen Stein [Z2]**

Wir bezeichnen diesen Fall mit [Z2]; die Abkürzung soll ausdrücken, dass ein Stein zwei Zusatzzüge macht. Der Entfesselungszug zählt nicht zu den Zusatzzügen. Wenn der Ld3 sich überhaupt bewegt, so muss sein erster Zug Ld3-e2 der Entfesselungszug sein; d.h. eventuelle Zusatzzüge könnten erst mit Le2-h5 beginnen. Der wL kann aber nicht beide Zusatzzüge ausführen (Le2-h5-g4), weil dazu gemäß (6) außerdem noch der Damenzug Dg4-h3 erforderlich wäre. Also kommen für die Zusatzzüge nur die drei Steine Dg4, Ta2, Th1 in Frage. Im Fall von Dg4 und Ta2 sind die zweizügigen Manöver eindeutig (Dg4-h3-h2 und Ta2-b2-b1), während der Th1 drei verschiedene zweizügige Manöver zur Auswahl hat (Th1-b1-b6, Th1-b1-e1, Th1-b1-h1).

- Im Fall von Th1-b1-h1 müssen beide Turmzüge im Partieverlauf vor Sd2-f1 stattfinden. Wir haben also die drei Züge Th1-b1, Tb1-h1, Sd2-f1, die genau in dieser Reihenfolge geschehen. Der Entfesselungszug erfolgt vor Sd2-f1, d.h. er kann in die genannte dreizügige Folge an drei Stellen eingeschoben werden. Der Bauernzug f3-f4 kann an beliebiger Stelle eingefügt werden. Da es für den Entfesselungszug zwei Möglichkeiten gibt, erhalten wir  $2 * 3 * 5 = 30$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-b6 oder Th1-b1-e1 muss der erste Turmzug Th1-b1 im Partieverlauf vor Sd2-f1 stattfinden. Der Zug Sd2-f1 kann deshalb in der Abfolge der beiden Turmzüge an zwei Stellen eingefügt werden – direkt nach dem ersten Zug oder nach dem zweiten Zug. Wenn der Springerzug direkt nach dem ersten Turmzug geschieht, kann der Entfesselungszug in der so entstandenen dreizügigen Folge wiederum an zwei Stellen ergänzt werden. Wenn der Springerzug andererseits erst nach dem zweiten Turmzug geschieht, hat der Entfesselungszug drei verschiedene Positionen. Schließlich kann noch der Bauernzug f3-f4 an beliebiger Stelle eingefügt werden. Da wir für den Entfesselungszug und für das zweizügige Turmmanöver jeweils zwei Möglichkeiten zur Auswahl haben, ergeben sich in diesem Fall  $2 * 2 * (2 + 3) * 5 = 100$  Verläufe.
- Im Fall von Dg4-h3-h2 oder Ta2-b2-b1 gibt es keine Abhängigkeiten mit dem Entfesselungs- und dem Springerzug. Wir haben zwei Abfolgen von je zwei Zügen, die in einer festen Reihenfolge gespielt werden müssen. Der Entfesselungszug kann an drei Stellen in das zweizügige Damen- oder Turmmanöver eingefügt werden: vor dem ersten Zug, nach dem ersten Zug oder nach dem zweiten Zug. Wenn er vor dem ersten Zug eingefügt wurde, gibt es für den Springerzug in der so entstandenen dreizügigen Folge dann noch drei Positionen; wenn der Entfesselungszug nach dem ersten Zug eingefügt wurde, gibt es für den Springerzug zwei Positionen; und wenn der Entfesselungszug am Ende eingefügt wurde, muss auch der Springerzug wiederum am Ende platziert werden. Die vier Züge können damit zusammen auf  $3 + 2 + 1 = 6$  verschiedene Arten angeordnet werden. Für den Bauernzug f3-f4 gibt es dann noch fünf verschiedene Positionen. Da wir für den Entfesselungszug und für das zweizügige Manöver von Dame oder Turm jeweils zwei Möglichkeiten zur Auswahl haben, ergeben sich diesmal  $2 * 2 * 6 * 5 = 120$  Verläufe.

Im Fall [S4B4]-[Z2] gibt es damit insgesamt  $30 + 100 + 120 = 250$  Verläufe.

### **7.10.2. Zusatzzüge von zwei verschiedenen Steinen [Z11]**

Die Bezeichnung [Z11] soll ausdrücken, dass zwei Steine je einen Zusatzzug ausführen. Als Zusatzzüge kommen die Züge Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Le2-h5 und g2-g3 in Frage.

- Falls der Zug Le2-h5 dabei ist, so muss Ld3-e2 der Entfesselungszug sein. Außerdem wird als zweiter Zusatzzug Dg4-h3 benötigt. Die fünf Züge stehen dann fest, und es geht nur noch um die Reihenfolge. Die drei Züge Ld3-e2, f3-f4 und Dg4-h3 können auf beliebige Weise untereinander angeordnet werden – das geht auf sechs Arten, und zwar je zwei mit dem Läuferzug an der ersten, zweiten und dritten Position. Der Zug Le2-h5 muss in der Reihenfolge nach diesen drei Zügen geschehen. Der Springerzug Sd2-f1 muss schließlich nach dem Entfesselungszug Ld3-e2 stattfinden. In den zwei Fällen mit dem Läuferzug an erster Position kann Sd2-f1 an vier Stellen eingeschoben werden; in den zwei Fällen mit dem Läuferzug an zweiter Position an drei Stellen; und in den zwei Fällen mit dem Läuferzug an dritter Position noch an zwei Stellen. Wir erhalten damit  $(4 + 3 + 2) * 2 = 18$  Verläufe.
- Falls der Zug Th1-b1 vorkommt, so muss er in der Reihenfolge vor Sd2-f1 geschehen. Für die Dreierkombination aus dem Entfesselungszug und den beiden Zügen Th1-b1 und Sd2-f1 gibt es damit genau zwei Anordnungen. Der Zug f3-f4 kann danach an vier verschiedenen Positionen eingeschoben werden und der zweite Zusatzzug dann nochmals an fünf verschiedenen Positionen. Für den zweiten Zusatzzug gibt es die drei Möglichkeiten Dg4-h3, Ta2-b2 und g2-g3 und für den Entfesselungszug die beiden üblichen Möglichkeiten Kf2-e3 und Ld3-e2. Insgesamt erhalten wir  $3 * 2 * 2 * 4 * 5 = 240$  Verläufe.
- Es bleibt der Fall zu betrachten, dass weder Le2-h5 noch Th1-b1 vorkommt. Die beiden Zusatzzüge sind dann aus den drei Zügen Dg4-h3, Ta2-b2 und g2-g3 auszuwählen. Ohne Beachtung der Reihenfolge geht dies auf drei Arten. Der Entfesselungszug muss vor Sd2-f1 geschehen. Der Bauernzug f3-f4 kann mit diesen beiden Zügen auf drei Arten angeordnet werden. Die beiden Zusatzzüge können untereinander auf zwei Arten angeordnet werden; und anschließend kann diese Folge der zwei Zusatzzüge dann noch auf zehn Arten in die Folge der drei anderen Züge integriert werden. Da für den Entfesselungszug schließlich zwei Möglichkeiten bestehen, erhalten wir  $2 * 3 * 2 * 3 * 10 = 360$  Verläufe.

Im Fall [S4B4]-[Z11] gibt es damit insgesamt  $18 + 240 + 360 = 618$  Verläufe.

Im Fall [S4B4] haben wir eine Gesamtzahl von  $250 + 618 = 868$  Verläufen.

### **7.11. Fall [S5B1]**

Wegen [B1] haben wir in der Partie die drei Züge 29. f3-f4, 30. f4-f5 und 31. f5-f6. Wegen [S5] zieht der Sd2 nicht. Es bleiben noch die beiden Züge Nr. 32 und 33 zu bestücken; wir bezeichnen sie wieder als Zusatzzüge. Wie im vorigen Fall unterscheiden wir die beiden Fälle [Z2] und [Z11].

#### **7.11.1. beide Zusatzzüge vom gleichen Stein [Z2]**

Es kommen fünf zweizügige Manöver in Frage: Dg4-h3-h2, Ta2-b2-b1, Th1-b1-b6, Th1-b1-e1, Th1-b1-h1. Das Läufermanöver Ld3-e2-h5 geht nicht, weil dazu zusätzlich der Zug Dg4-h3 benötigt würde. Jedes der fünf aufgelisteten Manöver ist möglich, und die Zugreihenfolge ist dann jeweils komplett festgelegt. Im Fall [S5B1]-[Z2] gibt es somit fünf Verläufe.

### **7.11.2. Zusatzzüge von zwei verschiedenen Steinen [Z11]**

Hier können wir uns aus dem Vorrat der sechs Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3 bedienen. Diese sechs Züge sind beliebig miteinander kombinierbar. Für den 32. Zug von Weiß haben wir damit sechs Möglichkeiten und für den 33. Zug danach nochmals fünf. Es ergeben sich  $6 * 5 = 30$  Verläufe.

Im Fall [S5B1] haben wir eine Gesamtzahl von  $5 + 30 = 35$  Verläufen.

### **7.12. Fall [S5B2]**

Wegen [B2] kommen in der Partie die beiden Züge f3-f4 und f4-f5 vor, und diese sind auf die drei Züge Nr. 29-31 verteilt. Außerdem haben wir den Königszug Kf2-e3. Es bleiben zwei Zusatzzüge übrig, und hierfür unterscheiden wir wieder die beiden Fälle [Z2] und [Z11].

#### **7.12.1. beide Zusatzzüge vom gleichen Stein [Z2]**

Für das zweizügige Manöver haben wir wieder die fünf Möglichkeiten Dg4-h3-h2, Ta2-b2-b1, Th1-b1-b6, Th1-b1-e1 und Th1-b1-h1; nicht jedoch Ld3-e2-h5 (wegen der Dg4). Die beiden Zusatzzüge und der Königszug Kf2-e3 können untereinander auf drei Arten angeordnet werden, und die beiden Bauernzüge können auf drei Arten auf die Züge Nr. 29-31 verteilt werden. Die drei Figurenzüge füllen dann die verbliebenen drei Zugnummern aus. Da wir fünf Möglichkeiten für die Auswahl der Zusatzzüge haben, ergeben sich  $5 * 3 * 3 = 45$  Verläufe.

#### **7.12.2. Zusatzzüge von zwei verschiedenen Steinen [Z11]**

Hier stehen uns die fünf Züge Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3 zur Verfügung. Sie sind beliebig untereinander und mit den beiden Bauernzügen f3-f4 und f4-f5 kombinierbar. Wir können die Bauernzüge auf drei Arten auf die drei Züge Nr. 29-31 verteilen; für den Königszug Kf2-e3 gibt es dann noch drei mögliche Zugnummern; und zum Ausfüllen der beiden verbliebenen Zugnummern haben wir an der ersten Position fünf Wahlmöglichkeiten und an der zweiten Position dann noch vier Möglichkeiten. Wir erhalten  $3 * 3 * 5 * 4 = 180$  Verläufe.

Im Fall [S5B2] haben wir eine Gesamtzahl von  $45 + 180 = 225$  Verläufen.

### **7.13. Fall [S5B3]**

In diesem Fall wissen wir, dass in der Partie der Zug 33. f4-f5 vorkommt. In einem der vier Züge davor haben wir f3-f4, und der Sd2 zieht nicht. Darüber hinaus ist noch nichts festgelegt. Wir haben diesmal also sogar drei Zusatzzüge, die noch zu verteilen sind. Wir unterscheiden in diesem Zusammenhang zwischen den drei Fällen [Z3], [Z21] und [Z111].

#### **7.13.1. alle drei Zusatzzüge vom gleichen Stein [Z3]**

Für das dreizügige Manöver kommt der Ld3 nicht in Frage, denn Ld3-e2-h5-g4 würde zusätzlich den Zug Dg4-h3 erfordern. Das dreizügige Manöver muss deshalb von einem der beiden wTT ausgeführt werden. Dafür gibt es genau die folgenden acht Möglichkeiten:

- Ta2-b2-b1-b6
- Ta2-b2-b1-e1
- Th1-b1-e1-a1
- Th1-b1-e1-b1
- Th1-b1-e1-e2
- Th1-b1-e1-e3
- Th1-b1-e1-e6
- Th1-b1-h1-b1

Weil im 33. Zug von Weiß der Bauernzug f4-f5 geschieht, muss die dreizügige Turmwanderung spätestens mit dem 32. Zug abgeschlossen werden. Selbst im Fall Th1-b1-e1-e6 kommt es damit zu keiner Kollision mit der Wanderung des schwarzen Läufers nach g2; denn der sL gelangt erst durch 32... Lf5-e4 auf die e-Linie. Darüber hinaus bestehen auch sonst keine Abhängigkeiten – weder mit den schwarzen Manövern noch mit dem Bauernzug f3-f4. Dieser Zug kann an vier Positionen unter den Zugnummern 29-32 untergebracht werden, und auf die dreizügige Turmwanderung entfallen dann die übrigen drei Züge. Wir erhalten damit  $8 * 4 = 32$  Verläufe.

### **7.13.2. zwei Zusatzzüge von einem Stein, der dritte von einem anderen Stein [Z21]**

Für das zweizügige Manöver haben wir diesmal sechs Möglichkeiten: Dg4-h3-h2, Ta2-b2-b1, Th1-b1-b6, Th1-b1-e1, Th1-b1-h1 und auch Ld3-e2-h5.

- Im Fall von Dg4-h3-h2 kann der verbleibende Zusatzzug aus den fünf Kandidaten Kf2-e3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3 ausgewählt werden. Es bestehen keine weiteren Abhängigkeiten. Es gibt fünf Wahlmöglichkeiten für den Zusatzzug, und dieser kann auf drei Arten zusammen mit dem Damenmanöver angeordnet werden. Der Bauernzug f3-f4 nimmt eine von vier möglichen Positionen unter den Zugnummern 29-32 ein, und die anderen drei Züge übernehmen die verbleibenden drei Zugnummern. Wir erhalten  $5 * 3 * 4 = 60$  Verläufe.
- Im Fall von Ta2-b2-b1 ist die Situation ähnlich, aber für den verbleibenden Zusatzzug gibt es hier nur vier Möglichkeiten: Kf2-e3, Dg4-h3, Ld3-e2 und g2-g3. Der Zug Th1-b1 scheidet aus. Auf die gleiche Art wie im vorigen Fall erhalten wir diesmal  $4 * 3 * 4 = 48$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-b6 kann der verbleibende Zusatzzug wieder aus fünf Kandidaten ausgewählt werden: Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3. Falls die Wahl auf Ta2-b2 fällt, darf dieser Zug erst nach den beiden Zügen Th1-b1-b6 geschehen; bei den vier anderen Kandidaten gibt es keine derartigen Einschränkungen. Diesmal ergeben sich damit  $4 + 4 * 3 * 4 = 52$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1 oder Th1-b1-h1 gibt es wieder die gleichen fünf Kandidaten für den verbleibenden Zusatzzug, diesmal aber keine weiteren Abhängigkeiten. Da wir in diesem Fall gleichzeitig zwei verschiedene Manöver des Th1 betrachten, erhalten wir  $2 * 5 * 3 * 4 = 120$  Verläufe.
- Im Fall von Ld3-e2-h5 benötigen wir als letzten Zusatzzug den Damenzug Dg4-h3. Die drei Züge Ld3-e2, f3-f4 und Dg4-h3 können untereinander auf beliebige Weise angeordnet werden, was sechs Möglichkeiten ergibt. Der Zug Le2-h5 muss auf jeden Fall nach den drei anderen Zügen geschehen, also im 32. Zug von Weiß. Wir erhalten 6 Verläufe.

Im Fall [S5B3]-[Z21] haben wir somit  $60 + 48 + 52 + 120 + 6 = 286$  Verläufe.

### **7.13.3. Zusatzzüge von drei verschiedenen Steinen [Z111]**

Diesmal stehen für die drei Zusatzzüge die sechs Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3 zur Verfügung. Es bestehen keine weiteren Abhängigkeiten. Der Bauernzug f3-f4 kann auf vier Arten unter einer der vier Zugnummern 29-32 untergebracht werden. Für den ersten dann noch offenen Zug gibt es sechs Wahlmöglichkeiten, für den zweiten danach noch fünf und für den letzten offenen Zug schließlich vier Möglichkeiten. Wir erhalten  $4 * 6 * 5 * 4 = 480$  Verläufe.

Im Fall [S5B3] haben wir eine Gesamtzahl von  $32 + 286 + 480 = 798$  Verläufen.

### **7.14. Fall [S5B4]**

Im letzten verbliebenen Fall [S5B4] wissen wir nur, dass der Bf3 nach dem Zug f3-f4 keinen zweiten Zug ausführt und dass der Sd2 sich nicht bewegt. Der Zug f3-f4 kann grundsätzlich unter jeder der fünf Zugnummern 29-33 geschehen. Die vier verbleibenden weißen Züge sind noch nicht festgelegt, wir bezeichnen sie alle vier als Zusatzzüge. Je nachdem, wie viele verschiedene Steine diese vier Zusatzzüge ausführen, unterscheiden wir diesmal fünf Fälle.

#### **7.14.1. alle vier Zusatzzüge vom gleichen Stein [Z4]**

Ein solches vierzügiges Manöver kann nur von einem der beiden Türme ausgeführt werden. Es gibt dafür die folgenden 16 Möglichkeiten:

- Ta2-b2-b1-e1 und dann im vierten Zug nach a1, b1, e2, e3 oder e6 (5 Varianten),
- Th1-b1-e1-a1-b1,
- Th1-b1-e1-b1 und dann im vierten Zug nach b6, e1 oder h1 (3 Varianten),
- Th1-b1-e1-e2 und dann im vierten Zug nach e1 oder e3 (2 Varianten),
- Th1-b1-e1-e3 und dann im vierten Zug nach e1 oder e2 (2 Varianten),
- Th1-b1-h1-b1 und dann im vierten Zug nach b6, e1 oder h1 (3 Varianten).

Mit dem Bauernzug f3-f4 sind alle diese 16 Turmwanderungen frei kombinierbar. Eine Kollision mit der Wanderung des schwarzen Läufers kann es nur im 33. Zug auf der e-Linie bei dem Zug Te1-e6 geben; und dieser Zug ist nur in der Variante Ta2-b2-b1-e1-e6 möglich.

- Im Fall Ta2-b2-b1-e1-e6 müssen deshalb die vier Turmzüge bereits in den Zügen Nr. 29-32 stattfinden, und für den Bauernzug f3-f4 bleibt nur der 33. Zug übrig. In diesem Fall gibt es also nur einen einzigen Verlauf.
- In den übrigen 15 Fällen kann hingegen der Bauernzug an fünf verschiedenen Stellen im Ablauf untergebracht werden, und dies führt auf  $15 * 5 = 75$  Verläufe.

Insgesamt haben wir im Fall [S5B4]-[Z4] damit 76 verschiedene Verläufe.

#### **7.14.2. drei Zusatzzüge vom gleichen Stein, der vierte von einem anderen Stein [Z31]**

Es gibt neun verschiedene dreizügige Manöver, die für die Zusatzzüge in Frage kommen:

- Ta2-b2-b1 und dann im dritten Zug nach b6 oder e1 (2 Varianten),
- Th1-b1-e1 und dann im dritten Zug nach a1, b1, e2, e3 oder e6 (5 Varianten),
- Th1-b1-h1-b1,
- Ld3-e2-h5-g4.

Wir sehen uns diese neun Manöver nun einzeln an.

- Im Fall von Ta2-b2-b1-b6 kommen für den vierten Zusatzzug die fünf Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3 in Frage.
  - Falls der letzte Zusatzzug der Zug Th1-b1 ist, so muss dieser im Partieverlauf nach dem Manöver Ta2-b2-b1-b6 stattfinden. Die Reihenfolge der vier Turmzüge liegt dann fest; der Bauernzug f3-f4 kann an beliebiger Position eingefügt werden. Wir erhalten fünf Verläufe.
  - Sonst haben wir einen der vier Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ld3-e2 und g2-g3. Jeder dieser vier Züge ist mit dem Turmmanöver Ta2-b2-b1-b6 beliebig kombinierbar. Der Zusatzzug lässt sich an vier Positionen in die Reihenfolge des Turmmanövers einschieben, und für den Bauernzug f3-f4 gibt es dann noch fünf Positionen. Da vier verschiedene Zusatzzüge zur Auswahl stehen, erhalten wir  $4 * 4 * 5 = 80$  Verläufe. Für das Manöver Ta2-b2-b1-b6 kommen wir insgesamt auf  $5 + 80 = 85$  Verläufe.
- Im Fall von Ta2-b2-b1-e1 scheidet für den vierten Zusatzzug der Turmzug Th1-b1 aus. Die übrigen vier Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ld3-e2 und g2-g3 sind möglich und mit dem Turmmanöver beliebig kombinierbar. Wir erhalten  $4 * 4 * 5 = 80$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1-a1 oder Th1-b1-e1-b1 oder Th1-b1-h1-b1 besteht für den vierten Zusatzzug die freie Auswahl zwischen den fünf Zügen Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3. Da wir hier drei Turmwanderungen parallel betrachten, erhalten wir  $3 * 5 * 4 * 5 = 300$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1-e2 scheidet als vierter Zusatzzug der Läuferzug Ld3-e2 aus. Die übrigen vier Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2 und g2-g3 sind möglich. Wir erhalten  $4 * 4 * 5 = 80$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1-e3 scheidet der Zug Kf2-e3 aus; es bleiben die vier Züge Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3.
  - Falls der letzte Zusatzzug Ld3-e2 ist, so muss dieser im Partieverlauf nach dem Manöver Th1-b1-e1-e3 stattfinden. Wir erhalten fünf Verläufe.
  - Sonst haben wir einen der drei Züge Dg4-h3, Ta2-b2 und g2-g3. Wir erhalten  $3 * 4 * 5 = 60$  Verläufe. Für das Manöver Th1-b1-e1-e3 kommen wir insgesamt auf  $5 + 60 = 65$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1-e6 darf der letzte Zug Te1-e6 nicht im 33. Zug von Weiß gespielt werden (wegen 32... Lf5-e4). Als vierter Zusatzzug kommen die fünf Züge Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3 in Frage.
  - Falls der letzte Zusatzzug Kf2-e3 oder Ld3-e2 ist, so muss dieser im Partieverlauf nach dem Manöver Th1-b1-e1-e6 stattfinden. Insbesondere ist damit ausgeschlossen, dass Te1-e6 der 33. Zug von Weiß sein könnte. Da wir die Wahl zwischen zwei Zusatzzügen haben, erhalten wir  $2 * 5 = 10$  Verläufe.
  - Sonst haben wir einen der drei Züge Dg4-h3, Ta2-b2 und g2-g3. Wir verteilen die drei Züge des Th1 auf die vier Zugnummern 29-32, was auf vier Arten möglich ist. Auf die verbleibenden zwei Zugnummern verteilen wir den vierten Zusatzzug und den Bauernzug f3-f4, was auf zwei Arten geht. Da wir die Wahl zwischen drei Zusatzzügen haben, erhalten wir  $3 * 4 * 2 = 24$  Verläufe. Für das Manöver Th1-b1-e1-e6 kommen wir insgesamt auf  $10 + 24 = 34$  Verläufe.
- Im Fall von Ld3-e2-h5-g4 benötigen wir als vierten Zusatzzug den Damenzug Dg4-h3. Die drei Züge Ld3-e2, f3-f4 und Dg4-h3 lassen sich beliebig anordnen, was auf sechs Arten möglich ist. Erst nach diesen Zügen sind dann 32. Le2-h5 und 33. Lh5-g4 spielbar. Wir erhalten sechs Verläufe.

Im Fall [S5B4]-[Z31] gibt es damit insgesamt  $85 + 80 + 300 + 80 + 65 + 34 + 6 = 650$  Verläufe.

### **7.14.3. je zwei Zusatzzüge von zwei verschiedenen Steinen [Z22]**

Hier kommen grundsätzlich die sechs zweizügigen Manöver Dg4-h3-h2, Ta2-b2-b1, Th1-b1-b6, Th1-b1-e1, Th1-b1-h1 und Ld3-e2-h5 in Frage.

- Wenn die Läuferwanderung Ld3-e2-h5 in der Partie vorkommt, dann muss auch das Damenmanöver Dg4-h3-h2 dabei sein. Die Züge f3-f4, Dg4-h3 und Ld3-e2 müssen dabei im Partieverlauf vor Le2-h5 geschehen. Der Zug Le2-h5 ist damit frühestens im 32. Zug möglich. Im Fall von 32. Le2-h5 haben wir in den ersten drei Zügen (Nr. 29-31) die drei Züge Ld3-e2, Dg4-h3 und f3-f4 in beliebiger Reihenfolge (sechs Kombinationen), und am Ende der Zugfolge steht dann 33. Dh3-h2. Wenn Le2-h5 andererseits erst im 33. Zug geschieht, können die beiden Züge Ld3-e2 und f3-f4 zuvor auf  $3 * 4 = 12$  verschiedene Arten in das zweizügige Manöver der wD eingeschoben werden. Im Fall von Ld2-e2-h5 erhalten wir damit insgesamt  $6 + 12 = 18$  Verläufe.
- Wenn der Ld3 nicht zieht, aber die Damenwanderung Dg4-h3-h2 in der Partie vorkommt, dann ist diese mit jedem beliebigen der vier Turmmanöver frei kombinierbar. Die beiden Turmzüge und die beiden Damenzüge können zusammen auf sechs verschiedene Arten angeordnet werden, und die Zugnummer des Bauernzugs f3-f4 ist dann immer noch frei wählbar (fünf Möglichkeiten). Es ergeben sich  $4 * 6 * 5 = 120$  Verläufe.
- Wenn schließlich Ld3 und Dg4 beide nicht ziehen, dann müssen beide Türme jeweils zweimal ziehen, d.h. die Turmwanderung Ta2-b2-b1 ist mit einem der drei Manöver Th1-b1-b6, Th1-b1-e1 oder Th1-b1-h1 zu kombinieren.
  - o Im Fall von Th1-b1-b6 muss dieses gesamte Manöver des Th1 abgeschlossen sein, bevor der Ta2 sich durch Ta2-b2 in Bewegung setzt. Die Anordnung der vier Turmzüge steht dann fest, und der Bauernzug f3-f4 kann noch auf fünf Arten eingeschoben werden, d.h. wir haben fünf Verläufe.
  - o Im Fall von Th1-b1-e1 oder Th1-b1-h1 muss der Th1 das Feld b1 betreten und wieder verlassen, bevor der Ta2 seinen zweiten Zug Tb2-b1 ausführt. Die Anordnung der drei Züge Th1-b1, Tb1-e1/h1 und Tb2-b1 ist damit eindeutig; der Zug Ta2-b2 kann an drei Stellen eingeschoben werden, und für den Bauernzug f3-f4 gibt es dann wieder fünf Möglichkeiten. Da wir zwei Varianten des Th1 parallel betrachten, ergeben sich  $2 * 3 * 5 = 30$  Verläufe. Für die Kombination zweier Turmmanöver kommen wir insgesamt auf  $5 + 30 = 35$  Verläufe.

Im Fall [S5B4]-[Z22] gibt es damit insgesamt  $18 + 120 + 35 = 173$  Verläufe.

### **7.14.4. zwei Zusatzzüge von einem Stein, dazu je ein Zusatzzug von zwei weiteren Steinen [Z211]**

Wieder sind die sechs zweizügigen Manöver Dg4-h3-h2, Ta2-b2-b1, Th1-b1-b6, Th1-b1-e1, Th1-b1-h1 und Ld3-e2-h5 zu betrachten.

- Im Fall von Dg4-h3-h2 bestehen für die beiden einzelnen Züge die fünf Möglichkeiten Kf2-e3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3. Sie sind beliebig kombinierbar. Der Bauernzug f3-f4 kann an fünf Positionen unter den Zugnummern 29-33 untergebracht werden, und die beiden Damenzüge können danach noch auf jeweils sechs Arten auf die verbleibenden vier Zugnummern verteilt werden. Für den ersten der beiden dann noch offenen Züge gibt es fünf Wahlmöglichkeiten, für den letzten Zug dann noch vier Möglichkeiten. Wir erhalten  $5 * 6 * 5 * 4 = 600$  Verläufe.

- Im Fall von Ta2-b2-b1 scheidet der Zug Th1-b1 aus. Für die beiden einzelnen Züge bestehen diesmal die vier Möglichkeiten Kf2-e3, Dg4-h3, Ld3-e2 und g2-g3. Mit der analogen Rechnung wie vorher erhalten wir  $5 * 6 * 4 * 3 = 360$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-b6 gibt es für die einzelnen Züge die fünf Kandidaten Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3.
  - Falls der Zug Ta2-b2 vorkommt, darf dieser erst nach dem Manöver Th1-b1-b6 geschehen. In die dreizügige Zugfolge aus Th1-b1, Tb1-b6 und Ta2-b2 kann der Bauernzug f3-f4 auf vier Arten eingeschoben werden und der zweite einzelne Zusatzzug dann noch auf fünf Arten; außerdem bestehen für den zweiten Zusatzzug vier Auswahlmöglichkeiten. Es ergeben sich  $4 * 5 * 4 = 80$  Verläufe.
  - Sonst kann der Bauernzug f3-f4 an fünf Positionen unter den Zugnummern 29-33 untergebracht werden, die beiden Turmzüge Th1-b1-b6 dann auf sechs Arten unter den verbleibenden vier Zugnummern, für den ersten der beiden noch offenen Züge gibt es vier Wahlmöglichkeiten und für den zweiten noch drei. Wir erhalten  $5 * 6 * 4 * 3 = 360$  Verläufe. Im Fall des Turmmanövers Th1-b1-b6 haben wir insgesamt  $80 + 360 = 440$  Verläufe.
- Im Fall von Th1-b1-e1 oder Th1-b1-h1 haben wir ebenfalls die fünf Kandidaten Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2 und g2-g3, und diesmal ohne weitere Einschränkungen. Da wir zwei zweizügige Turmmanöver parallel betrachten, erhalten wir diesmal  $2 * 5 * 6 * 5 * 4 = 1.200$  Verläufe.
- Im Fall von Ld3-e2-h5 wird schließlich unter den beiden einzelnen Zusatzzügen der Damenzug Dg4-h3 benötigt. Die drei Züge Ld3-e2, f3-f4 und Dg4-h3 können untereinander beliebig angeordnet werden (sechs Möglichkeiten), und der Zug Le2-h5 geschieht erst nach diesen drei Zügen. Der letzte offene Zug kann auf fünf Arten in die Reihenfolge eingefügt werden, und es gibt für diesen Zug die vier Kandidaten Kf2-e3, Ta2-b2, Th1-b1 und g2-g3. Damit erhalten wir  $6 * 5 * 4 = 120$  Verläufe.

Im Fall [S5B4]-[Z211] gibt es also insgesamt  $600 + 360 + 440 + 1.200 + 120 = 2.720$  Verläufe.

#### **7.14.5. vier Zusatzzüge von vier verschiedenen Steinen [Z1111]**

Für die vier Zusatzzüge gibt es die sechs Wahlmöglichkeiten Kf2-e3, Dg4-h3, Ta2-b2, Th1-b1, Ld3-e2 und g2-g3. Sie sind beliebig miteinander kombinierbar. Für den Bauernzug f3-f4 gibt es fünf verschiedene Positionen unter den Zugnummern 29-33. Für den ersten der vier verbleibenden Züge haben wir dann sechs Möglichkeiten, für den zweiten noch fünf Möglichkeiten, für den dritten vier Möglichkeiten und für den letzten noch drei Möglichkeiten. Wir erhalten  $5 * 6 * 5 * 4 * 3 = 1.800$  Verläufe.

Im Fall [S5B4] haben wir eine Gesamtzahl von  $76 + 650 + 173 + 2.720 + 1.800 = 5.419$  Verläufen.

Damit ist die Betrachtung der 14 relevanten Fälle abgeschlossen.

### **7.15. Zusammenfassung der Ergebnisse**

#### **7.15.1. Anzahl der Partien**

Wir haben die folgenden Anzahlen der verschiedenen Verläufe der Schlussphase einer optimalen Partie ermittelt:

	[B1]	[B2]	[B3]	[B4]	Summe
[S1]	---	---	4	75	79
[S2]	---	---	---	5	5
[S3]	---	12	16	290	318
[S4]	2	33	88	250 [Z2] + 618 [Z11] = 868	991
[S5]	5 [Z2] + 30 [Z11]  = 35	45 [Z2] + 180 [Z11]  = 225	32 [Z3] + 286 [Z21] + 480 [Z111]  = 798	76 [Z4] + 650 [Z31] + 173 [Z22] + 2.720 [Z211] + 1.800 [Z1111]  = 5.419	6.477
<b>Summe</b>	37	270	906	6.657	<b>7.870</b>

Es gibt also insgesamt 7.870 verschiedene Schlussphasen der Partie (Züge Nr. 29-33). Da wir weiter oben bereits hergeleitet haben, dass es 144 verschiedene Anfangsphasen gibt (Züge Nr. 1-28) und die Anfangs- und Schlussphasen beliebig miteinander kombiniert werden können, existieren damit  $144 * 7.870 = 1.133.280$  verschiedene optimale Lösungen der Aufgabenstellung.

### 7.15.2. Züge

Die 7.870 verschiedenen Schlussphasen der Partie enthalten jeweils den zwingend erforderlichen Zug f3-f4 und darüber hinaus noch vier „optionale“ Züge von Weiß. In der Summe über alle 7.870 Schlussphasen macht das 31.480 optionale Züge. Wir haben weiter oben bereits festgestellt, dass diese optionalen Züge stets aus einer Grundmenge von insgesamt 27 verschiedenen weißen Zügen ausgewählt werden müssen. Durch sorgfältiges Abzählen der verschiedenen Kombinationen in den diversen oben untersuchten Fällen erhalten wir für diese 27 Züge die nachstehende Rangliste:

		S1 B3	S1 B4	S2 B4	S3 B2	S3 B3	S3 B4	S4 B1	S4 B2	S4 B3	S4 B4 Z2	S4 B4 Z11	S5 B1 Z2	S5 B1 Z11	S5 B2 Z2	S5 B2 Z11	S5 B3 Z3	S5 B3 Z21	S5 B3 Z111	S5 B4 Z4	S5 B4 Z31	S5 B4 Z22	S5 B4 Z211	S5 B4 Z1111	gesamt
1.	Th1-b1	-	15	5	-	-	50	-	6	16	130	240	3	10	27	72	28	184	240	70	584	125	1.910	1.200	4.915
2.	Dg4-h3	-	20	-	-	-	80	-	9	24	60	338	1	10	9	72	-	114	240	-	154	138	1.580	1.200	4.049
3.	Ld3-e2	4	75	-	12	16	290	1	-	44	125	318	-	10	-	72	-	66	240	-	116	18	1.220	1.200	3.827
4.	Kf2-e3	-	-	-	12	16	290	1	33	44	125	300	-	10	45	180	-	60	240	-	125	-	1.130	1.200	3.811
5.	Ta2-b2	-	20	-	-	-	80	-	9	24	60	320	1	10	9	72	8	88	240	21	273	65	1.190	1.200	3.690
6.	g2-g3	-	20	-	-	-	80	-	9	24	-	320	-	10	-	72	-	60	240	-	148	-	1.130	1.200	3.313
7.	Sd2-f1	4	75	5	12	16	290	2	33	88	250	618	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1.393
8.	Tb1-e1	-	-	5	-	-	-	-	-	-	50	-	1	-	9	-	24	60	-	71	459	45	600	-	1.324
9.	f4-f5	4	-	-	12	16	-	2	33	88	-	-	5	30	45	180	32	286	480	-	-	-	-	-	1.213
10.	Tb1-h1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	30	-	1	-	9	-	4	60	-	25	100	45	600	-	874
11.	Dh3-h2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	-	1	-	9	-	-	60	-	-	-	138	600	-	868
12.	Tb2-b1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	60	-	1	-	9	-	8	48	-	21	165	65	360	-	737
13.	Tb1-b6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	50	-	1	-	9	-	4	52	-	10	85	35	440	-	686
14.	Le2-h5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	18	-	-	-	-	-	6	-	-	6	18	120	-	168
15.	Te1-b1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	20	100	-	-	-	124
16.	Te1-a1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	10	100	-	-	-	114
17.	Te1-e2	-	-	5	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	15	80	-	-	-	104
18.	Te1-e3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	15	65	-	-	-	84
19.	Sf1-e3	4	75	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	79
20.	Te1-e6	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4	-	-	1	34	-	-	-	39
21.	f5-f6	-	-	-	-	-	-	2	-	-	-	-	5	30	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	37
22.	Lh5-g4	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	6	-	-	-	6
23.	Ta1-b1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	5
	Te2-e1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	5
	Te2-e3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	5
	Te3-e1	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	5
	Te3-e2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5	-	-	-	-	5
	Summe	16	300	20	48	64	1.160	8	132	352	1.000	2.472	20	120	180	720	128	1.144	1.920	304	2.600	692	10.880	7.200	31.480
	Verläufe	4	75	5	12	16	290	2	33	88	250	618	5	30	45	180	32	286	480	76	650	173	2.720	1.800	7.870

Klarer Spitzenreiter dieser Rangliste ist der Zug Th1-b1, der davon profitiert, dass er zu einem weit gefächerten Variantenstrauß von zwei-, drei- und vierzügigen Wanderungen des Th1 erweitert werden kann. Auf den Rängen 2-7 folgen die jeweils ersten Züge der übrigen bewegungsfähigen weißen Steine – mit Ausnahme des Bf3, weil dessen erster Zug f3-f4 nicht zu den optionalen Zügen zählt. Unter den Rängen 2-7 ist der Zug Sd2-f1 das Schlusslicht, weil durch die erforderliche Entfesselung des Sd2 viele Kombinationsmöglichkeiten entfallen. Für die Reihung der Ränge 2-6 untereinander sind verschiedene Besonderheiten und Abhängigkeiten verantwortlich, die einzelne Kombinationen ermöglichen oder verhindern. Es mag etwas überraschen, dass der Zug Ta2-b2 erst auf dem 5. Rang zu finden ist, obwohl doch auch dieser Zug (wie Th1-b1) den Auftakt zu diversen mehrzügigen Wanderungen bildet. Die Verzweigungen sind in diesem Fall aber längst nicht so vielfältig. Auf den Rängen 8-14 (und 19) finden sich Züge, die jeweils als zweiter Zug einer Wanderung auftreten können. Ab dem 14. Rang sind die Häufigkeiten des Auftretens so gering, dass man diese Züge (die zweite Hälfte der Liste) als seltene „Exoten“ ansehen kann.

### 7.15.3. Besuche

Die 27 Züge aus der Liste besuchen insgesamt 26 verschiedene Felder des Schachbretts. Wir zählen, wie häufig jedes Feld von den 31.480 optionalen Zügen der 7.870 Verläufe insgesamt besucht wird. Außerdem ermitteln wir die durchschnittliche Anzahl von Besuchen in den 7.870 möglichen Verläufen.

Feld	Züge	Besuche je Zug	Besuche gesamt	Durchschnitt
a1	Te1-a1	114	114	0,014
b1	Th1-b1, Tb2-b1, Te1-b1, Te1-a1, Ta1-b1	4.915 + 737 + 124 + 114 + 5	5.895	0,749
c1, d1	Th1-b1, Tb1-e1, Tb1-h1, Te1-b1, Te1-a1	4.915 + 1.324 + 874 + 124 + 114	7.351	0,934
e1	Th1-b1, Tb1-e1, Tb1-h1, Te2-e1, Te3-e1	4.915 + 1.324 + 874 + 5 + 5	7.123	0,905
f1	Th1-b1, Sd2-f1, Tb1-h1	4.915 + 1.393 + 874	7.182	0,913
g1	Th1-b1, Tb1-h1	4.915 + 874	5.789	0,736
h1	Tb1-h1	874	874	0,111
b2	Ta2-b2, Tb1-b6	3.690 + 686	4.376	0,556
e2	Ld3-e2, Te1-e2, Te1-e3, Te1-e6, Te3-e1, Te3-e2	3.827 + 104 + 84 + 39 + 5 + 5	4.064	0,516
h2	Dh3-h2	868	868	0,110
b3, b4, b5, b6	Tb1-b6	686	686	0,087
e3	Kf2-e3, Te1-e3, Sf1-e3, Te1-e6, Te2-e3	3.811 + 84 + 79 + 39 + 5	4.018	0,511
f3	Le2-h5	168	168	0,021
g3	g2-g3	3.313	3.313	0,421
h3	Dg4-h3	4.049	4.049	0,514
e4, e5, e6	Te1-e6	39	39	0,005
g4	Le2-h5, Lh5-g4	168 + 6	174	0,022
f5	f4-f5	1.213	1.213	0,154
h5	Le2-h5	168	168	0,021
f6	f5-f6	37	37	0,005

Bei Gleichgewichtung sämtlicher optimaler Lösungen nebst zufälliger Auswahl einer Lösung wird also jedes der vier mittleren Felder der ersten Reihe (c1, d1, e1, f1) in der Schlussphase der Partie im Mittel häufiger als 0,9-mal besucht.

Weiter oben (Abschnitt 5.4) hatten wir bereits die Anzahlen der Besuche je Feld bestimmt, die sich aus den 62 zwingend erforderlichen Zügen jeder optimalen Lösung ergeben. Insgesamt können wir nun für die vollständige optimale Lösung (inklusive der vier optionalen Züge) jeweils einen (statistischen) Mittelwert für die Anzahl der Besuche je Feld angeben:

	a	b	c	d	e	f	g	h	
8	---	1	1	2	2	2	1	---	8
7	---	---	1	3	4	4	2	1	7
6	1	2,087	5	3	1,005	5,005	3	1	6
5	3	3,087	2	1	1,005	3,154	3	2,021	5
4	1	3,087	1	1	2,005	2	1,022	2	4
3	1	1,087	1	2	2,511	4,021	1,421	1,514	3
2	1	1,556	1	2	2,516	1	1	1,110	2
1	1,014	2,749	2,934	2,934	2,905	2,913	2,736	1,111	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	

Als meistbesuchtes Feld ergibt sich in dieser Wertung das Feld f6 mit einem hauchdünnen Vorsprung (0,005 Besuche!) vor dem Feld c6. Auf den dritten Rang hat sich das Feld f3 geschoben, wiederum nur knapp vor den beiden nachfolgenden Feldern e7 und f7. Unter den acht Feldern mit drei Besuchen haben sich nun die drei Felder f5, b4 und b5 leicht verbessert. Am Ende der Rangliste bleiben jetzt 17 Felder übrig, die im Lösungsverlauf jeweils genau einmal besucht werden und auch von den optionalen Zügen keinen zusätzlichen Besuch abgestattet bekommen.

#### 7.15.4. Schläge

Wir werfen nun noch einen Blick auf die Schläge, die in einer optimalen Lösung vorkommen können. Wir wissen bereits, dass es zehn zwingend erforderliche Schläge gibt (je zwei auf b4, a5 und f6 sowie je einen auf b2, c2, d8 und h5, wobei sich Letzterer im 31. Zug von Schwarz ereignet, also während der Schlussphase). Von den übrigen 22 Steinen (10 weißen und 12 schwarzen) bleiben 19 sicher bis zum Partieende auf dem Brett (Weiß: KD TTLSS+Bd4, Schwarz: KT TLSS+Bb7c4d5g5h7). Es verbleiben drei „optionale“ Schläge, die in der Schlussphase stattfinden können, aber nicht müssen: sLg6xBf5, sLe4xBg2 und wTe1xBe6.

- Der Schlag sLg6xBf5 ist gleichbedeutend mit dem Fall [B2], er kommt somit unter den 7.870 verschiedenen Schlussphasen 270-mal vor (3,4%).
- Der Schlag sLe4xBg2 ereignet sich genau dann, wenn der Zug g2-g3 nicht in der Partie vorkommt. Da wir für diesen Zug eine Gesamtzahl von 3.313 Verläufen der Schlussphase ermittelt haben, kommt der Schlag somit unter den 7.870 Schlussphasen 4.557-mal vor (57,9%).
- Der Schlag wTe1xBe6 ist gleichbedeutend damit, dass der Zug Te1-e6 in der Schlussphase vorkommt; dies ist in 39 Verläufen der Fall. Der Schlag auf e6 ereignet sich also nur in 0,5% aller Schlussphasen.

Weil der Zug Te1-e6 nicht im Fall [B2] vorkommt, sind die beiden Schläge auf f5 und e6 nicht innerhalb einer Lösung miteinander kombinierbar. Der Zug g2-g3 kommt unter den 270 Verläufen des Falls [B2] insgesamt 81-mal vor (9-mal im Fall [S4B2] und 72-mal im Fall [S5B2]), d.h. die

Kombination zwischen den beiden Schlägen auf f5 und g2 haben wir 189-mal. Die Kombination aus den beiden Zügen Te1-e6 und g2-g3 kann es nur im Fall [S5B4-Z31] geben, und zwar mit der Zugfolge Th1-b1-e1-e6; dafür gibt es nur acht Verläufe. In 31 Verläufen haben wir damit die Kombination aus den beiden Schlägen auf e6 und g2.

Insgesamt erhalten wir damit im Hinblick auf die optionalen Schläge die folgenden sechs Fälle:

Schlag auf f5	Schlag auf g2	Schlag auf e6	Anzahl Verläufe	relativer Anteil	weiße Steine in Endstellung	schwarze Steine in Endstellung	Steine gesamt
-	x	-	4.337	55,11 %	9	12	21
-	-	-	3.224	40,97 %	10	12	22
x	x	-	189	2,40 %	8	12	20
x	-	-	81	1,03 %	9	12	21
-	x	x	31	0,39 %	9	11	20
-	-	x	8	0,10 %	10	11	21

Im statistischen Mittel stehen in der Schlussstellung damit 21,38 Steine auf dem Brett (9,39 weiße und 12,00 schwarze).

#### 7.15.5. Schlussstellungen

Wir wollen jetzt noch die Anzahl der verschiedenen Schlussstellungen der optimalen Lösungen ermitteln. Beim Abzählen können wir hier grundsätzlich ähnlich vorgehen wie bei der Betrachtung der konkreten Verläufe der Schlussphase – wir müssen nur die Zugreihenfolge wieder „vergessen“ und Zugumstellungen miteinander identifizieren. Bei den Manövern der beiden wTT müssen wir allerdings etwas genauer hinsehen. Wir wissen, dass Sc3 und Bd4 in der Schlussstellung immer noch vorhanden sind und dass Bh5 geschlagen wird. An den vorhandenen Steinen in der Schlussstellung können wir direkt ablesen, welche der drei optionalen Schläge stattgefunden haben und welche nicht. Für sechs der acht verbleibenden weißen Steine (nämlich für alle außer den beiden Türmen, also KDLSBB) können wir außerdem aus ihrer Position in der Schlussstellung (bzw. aus ihrer Abwesenheit auf dem Brett) direkt ableiten, welche Züge sie in der Schlussphase der Partie ausgeführt haben müssen. Alle optionalen Züge mit Ausnahme der Turmzüge sind damit aus der Schlussstellung direkt ersichtlich. Jede Schlussstellung lässt sich deshalb auch eindeutig dem dazugehörigen Fall [S1]-[S5] und dem dazugehörigen Fall [B1]-[B4] zuordnen, es kommt hier zu keinen Überschneidungen.

Da wir bei gegebener Schlussstellung alle optionalen Züge mit Ausnahme der Turmzüge exakt kennen, ist auch die Gesamtzahl der Turmzüge damit bekannt. Je kleiner diese Gesamtzahl ist, desto einfacher lassen sich die Turmmanöver überblicken:

- Wenn die wTT zusammen keinen Zug ausführen, dann stehen sie am Ende auf a2 und h1.
- Wenn die wTT zusammen einen Zug ausführen, so ist dies entweder Ta2-b2 oder Th1-b1. An der Position der beiden Türme (b2+h1 oder a2+b1) können wir eindeutig ablesen, um welchen Zug es sich handelt.
- Wenn die wTT zusammen zwei Züge machen, dann ist immer noch alles eindeutig:
  - o Falls am Schluss auf a2 ein wT steht, dann muss dies der Ta2 sein, und dieser hat nicht gezogen. Der Th1 hat zwei Züge gemacht und steht auf b6, e1 oder h1. Zu jedem dieser drei Felder gehört eine eindeutige Zugfolge.
  - o Falls auf a2 kein wT steht, aber auf b2 einer vorhanden ist, so muss dies wiederum der

- Ta2 sein, der genau einmal gezogen hat (Ta2-b2). Der Th1 hat dann ebenfalls genau einmal gezogen und steht auf h1.
- Falls weder auf a2 noch auf b2 ein wT steht, dann muss der Ta2 zweimal gezogen haben, und dann finden wir die beiden wTT auf b1 und h1. Die Zugfolge des Ta2 ist wieder eindeutig.
  - Wenn die wTT zusammen drei Züge machen, dann können wir zunächst festhalten, dass die Kombination aus zwei Zügen des Ta2 und einem Zug des Th1 nicht möglich ist – denn dann würden die beiden wTT auf dem Feld b1 miteinander kollidieren. Die Verteilung der Züge zwischen Ta2 und Th1 lautet also 0+3 oder 1+2 oder 3+0.
    - Falls am Schluss auf a2 ein wT steht, so ist dies wieder der Ta2, und wir haben die Verteilung 0+3. Der zweite wT steht dann auf a1, b1, e2, e3 oder e6. Im Fall der vier Felder a1, e2, e3, e6 ist die Zugfolge des Th1 jeweils eindeutig. Im Fall des Feldes b1 hat der Th1 allerdings zwei verschiedene Zugfolgen, um dieses Feld zu erreichen: Th1-b1-e1-b1 und Th1-b1-h1-b1. Es ist darauf zu achten, dass diese beiden Zugfolgen nicht versehentlich getrennt gezählt werden, wenn es um die Schlussstellung geht. Immerhin ist noch die Verteilung der Zügezahlen und damit der jeweilige Fall [Z...] eindeutig, nämlich [Z3] bzw. [Z31].
    - Falls auf a2 kein wT steht, aber auf b2 einer vorhanden ist, so haben wir für die Zügezahlen die Verteilung 1+2. Der Ta2 zieht einzügig nach b2, und der Th1 zieht zweizügig nach b6, e1 oder h1. Die Zugfolge ist dabei jeweils eindeutig.
    - Falls weder auf a2 noch auf b2 ein wT steht, so bleibt nur die Verteilung 3+0 übrig. Der Th1 bleibt also auf h1, und der Ta2 gelangt in drei Zügen nach b6 oder e1. Die Zugfolge ist eindeutig.
  - Wenn die wTT zusammen vier Züge machen, wird die Lage etwas unübersichtlicher. Immerhin wissen wir in dieser Situation, dass sämtliche optionalen Züge von den wTT verbraucht werden, insbesondere muss der Fall [S5B4] vorliegen. Für die Verteilung der Zügezahlen sind noch [Z4], [Z31] und [Z22] möglich.
    - Falls am Schluss auf a2 ein wT steht, so ist dies der Ta2, und wir haben die Verteilung 0+4 und den Fall [Z4]. Der Th1 hat für sein vierzүgiges Manöver viele Möglichkeiten. In der Schlussstellung kommen für ihn die folgenden sechs Felder in Frage:
      - b1 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-a1-b1
      - b6 mit zwei Zugfolgen: h1-b1-e1/h1-b1-b6
      - e1 mit vier Zugfolgen: h1-b1-e1-b1/e2/e3-e1, h1-b1-h1-b1-e1
      - h1 mit zwei Zugfolgen: h1-b1-e1/h1-b1-h1
      - e2 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-e3-e2
      - e3 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-e2-e3
    - Falls auf a2 kein wT steht, aber auf b2 einer vorhanden ist, so ist dies der Ta2, und wir haben die Verteilung 1+3 und den Fall [Z31]. Der Ta2 hat den Zug Ta2-b2 ausgeführt. Für den Th1 kommen in der Schlussstellung fünf Felder in Frage:
      - a1 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-a1
      - b1 mit zwei Zugfolgen: h1-b1-e1/h1-b1
      - e2 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-e2
      - e3 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-e3
      - e6 mit eindeutiger Zugfolge: h1-b1-e1-e6
    - Falls weder auf a2 noch auf b2 ein wT steht und außerdem auch auf b1 nicht, so benötigt der Ta2 mindestens drei Züge. Für den Th1 bleibt höchstens ein Zug übrig, aber da ein solcher Zug ihn nach b1 führen würde, muss in diesem Fall die Verteilung 4+0 vorliegen und der Fall [Z4]. Der Th1 steht in der Schlussstellung auf h1. Der Ta2 erreicht in vier

Zügen eines der vier Felder a1, e2, e3, e6, und die Zugfolge ist dabei jeweils eindeutig (sie beginnt stets mit Ta2-b2-b1-e1).

- Es bleibt der Fall zu betrachten, dass in der Schlussstellung ein wT auf b1 steht, aber keiner auf a2 oder b2. Der Ta2 hat dann mindestens zweimal gezogen, d.h. wir haben die Verteilung 2+2 oder 3+1 oder 4+0.
  - Im Fall der Verteilung 2+2 ist der Ta2 nach b1 gewandert, sein Weg ist eindeutig. Der Th1 hat zwei Züge ausgeführt und ist dadurch nach b6, e1 oder h1 gelangt. Der Weg ist jeweils eindeutig.
  - Im Fall der Verteilung 3+1 ist der Th1 nach b1 gezogen, und der Ta2 muss in drei Zügen nach b6 gelangt sein (Ta2-b2-b1-b6).
  - Im Fall der Verteilung 4+0 verharrt der Th1 auf h1, so dass der Ta2 auf dem Feld b1 benötigt wird. Dies kann er in vier Zügen erreichen, der Weg ist eindeutig (a2-b2-b1-e1-b1).

Insgesamt können wir festhalten, dass neben dem Feld b1 der zweite wT stets auf einem der drei Felder b6, e1, h1 stehen muss. Wenn wir einen wT auf e1 haben, so sind die Wege eindeutig, und es liegt der Fall [Z22] vor. Wenn ein wT auf b6 steht, so kann der Fall [Z22] oder der Fall [Z31] vorliegen. Wenn schließlich ein wT auf h1 steht, so kann es sich um den Fall [Z22] oder den Fall [Z4] handeln.

Die Situation, in der alle vier optionalen Züge von den wTT ausgeführt werden, bezeichnen wir als Fall [4T]. Im Fall [4T] haben wir insgesamt 18 Positionen für die beiden wTT in der Schlussstellung identifiziert (sechs Fälle mit Ta2, fünf Fälle mit Tb2, vier Fälle ohne Tb1 und drei Fälle mit Tb1). Da im Fall [4T] für alle übrigen Steine die Position in der Schlussstellung ebenfalls feststeht, gibt es im Fall [4T] also 18 verschiedene Schlussstellungen der Partie.

Für die weitere Zählung der verschiedenen Schlussstellungen verwenden wir nun die gleiche Fallunterscheidung wie oben bei der Zählung der Verläufe der Schlussphase – allerdings mit der Ausnahme, dass wir im Fall [S5B4] die Verteilungen [Z4], [Z31] und [Z22] jeweils ohne die Kombinationen betrachten, die zum Fall [4T] gehören. Der Fall [Z4] entfällt dadurch ganz.

Es ergibt sich das folgende Resultat für die Anzahl der verschiedenen Schlussstellungen einer optimalen Lösung:

	<b>[B1]</b>	<b>[B2]</b>	<b>[B3]</b>	<b>[B4]</b>	<b>Summe</b>
<b>[S1]</b>	---	---	1	4	5
<b>[S2]</b>	---	---	---	1	1
<b>[S3]</b>	---	1	1	4	6
<b>[S4]</b>	2	4	8	10 [Z2] + 13 [Z11] = 23	37
<b>[S5]</b>	5 [Z2] + 15 [Z11]  = 20	5 [Z2] + 10 [Z11]  = 15	7 [Z3] + 25 [Z21] + 20 [Z111] = 52	27 [Z31] + 5 [Z22] + 50 [Z211] + 15 [Z1111] + 18 [4T] = 115	202
<b>Summe</b>	22	20	62	147	<b>251</b>

Die 1.133.280 optimalen Lösungen bilden also insgesamt 251 verschiedene Schlussstellungen.

## 8. Anhang B: optimale Lösungen ohne Nutzung des Zuges wLd8-a5

Im Abschnitt 5.5 haben wir festgestellt, dass jede optimale Lösung der Aufgabenstellung den Zug wLd8-a5 benötigt, also den letzten Zug der Partie *CarCar*. In diesem Anhang wollen wir nun die optimalen Lösungen unter der zusätzlichen Voraussetzung bestimmen, dass der Zug wLd8-a5 nicht zur Verfügung steht. Wir werden zeigen, dass die folgende Lösung optimal ist:

### Partie *P\_2*:

1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. e5 g5 7. f3 Se7 8. f4 Tf8 9. Sf3 f5 10. exf6 h6 11. Ld3 Txf6 12. O-O Tf5 13. a3 Tf7 14. Te1 Th7 15. Ta2 c5 16. Kh2 Dc7 17. Kg3 Sf5+ 18. Kf2 Td7 19. Le3 Td6 20. Tea1 Tb6 21. Tb1 Sc6 22. Th1 O-O-O 23. Sd2 a5 24. axb4 Txb4 25. Le2 Txb2 26. Dh3 c4 27. Lh5 Txc2 28. Dh2 Sce7 29. Lg4 Le8 30. Lf3 Lh5 31. Lg4 Lg6 32. Lxf5 Lxf5 33. Tb2 Le4 34. Tbb1 Lxg2.

Man kann leicht nachprüfen, dass es sich um eine zulässige Lösung handelt. Der Nachweis, dass diese Lösung auch optimal ist, verläuft entlang der gleichen Grundstruktur wie weiter oben im Abschnitt 3.

Zunächst sammeln wir Züge von Schwarz, die in der Lösung zwingend vorkommen müssen. Um das Feld c4 zu besuchen, benötigen wir c7-c5-c4. Für das Feld a4 sind die Züge Lc8-d7-a4 und d7-d5 erforderlich und für das Feld g8 die Züge Th8-f8, Sg8-e7, Lf8-b4 und e7-e6. Für das Feld h7 benötigen wir Tf8-f6-f5-f7-h7, f7-f5, g7-g5 und h7-h6. Das Feld c2 liefert die Züge Tb6-b4-b2-c2 und das Feld b8 die Züge O-O-O und Sb8-c6.

Für sO-O-O muss die Dd8 vorher verschwinden. Würde die Dd8 von Weiß geschlagen, so ginge dies nur durch Lh4xd8; danach könnte der wLd8 selbst nicht mehr ziehen und müsste wiederum von Schwarz geschlagen werden; dies wäre nur durch Td2xd8 möglich, aber der sTd8 käme danach von diesem Feld nicht mehr weg – Widerspruch. Also muss die sD das Feld d8 ziehend räumen, und dies liefert uns den Zug Dd8-c7.

Bisher haben wir 22 zwingend erforderliche Züge für Schwarz hergeleitet.

Das Feld g2 muss entweder vom sK oder vom sL besucht werden. Der sK würde nach der Rochade von c8 aus 13 zusätzliche Züge benötigen – dann hätten wir schon 35 schwarze Züge. Da wir mit *P\_2* bereits eine Lösung mit 34 Zügen kennen, erhalten wir deshalb nun sechs weitere Züge, die zwingend erforderlich sind: La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2. Insgesamt kennen wir 28 schwarze Züge, die in jeder optimalen Lösung vorkommen müssen.

Der Springerzug Sb8-c6 geschieht vor O-O-O und damit auch vor La4-e8. Deshalb muss der sS von c6 aus noch einen zweiten Zug ausführen (Sc6-a5 oder Sc6-e7), um die Diagonale zu räumen.

Für den Besuch auf a6 wird ein weiterer Zug benötigt (a7-a5 oder Tb6-a6).

Der sT, der von b6 nach c2 wandert, muss entweder von f8 kommen (mindestens vier Züge) oder von h7 (mindestens drei Züge). Käme er von f8, so wäre außerdem noch der weitere Zug Td8-f8 erforderlich (da im Partieverlauf zwei schwarze Turmzüge auf f8 beginnen), und dann kämen wir insgesamt schon auf mindestens 35 Züge – Widerspruch. Also kommt der sT von h7 aus nach b6: Th7-d7-d6-b6.

Damit sind nun bereits 31 schwarze Züge exakt bekannt, hinzu kommen noch zwei weitere Züge (einmal Sc6-a5 oder Sc6-e7, einmal a7-a5 oder Tb6-a6).

Wenn die Wanderung Tf8-f6-f5-f7-h7-d7 vom Original-Th8 ausgeführt wird, dann benötigen wir Sg8-e7 vor Th8-f8 und danach noch einen zweiten Zug des Se7, um Th7-d7 zu ermöglichen (Se7-f5

oder Se7-g6). Wenn die Wanderung andererseits vom Original-Ta8 ausgeführt wird, so haben wir den Zug Td8-f8. In jedem Fall kommt in der Lösung also einer der Züge Se7-f5, Se7-g6, Td8-f8 vor.

Insgesamt sind damit 34 Züge verbraucht. Für das Manöver Tb6-a6-b6 ist nun keine Zeit mehr, d.h. für das Feld a6 wird der Zug a7-a5 benötigt. Da nicht zwei schwarze Steine am Ende der Partie auf a5 stehen können und Weiß nicht auf a5 schlägt, scheidet der Zug Sc6-a5 nun aus. Als zweiter Zug des weißen Damenspringers wird deshalb Sc6-e7 benötigt. Da weiterhin auch nicht beide sSS am Ende auf dem Feld e7 stehen können, ist nun ein Springerzug erforderlich, der auf diesem Feld beginnt (Se7-f5 oder Se7-g6). Für Td8-f8 ist deshalb keine Zeit mehr: Wir benötigen Th8-f8-f6-f5-f7-h7-d7 und Sg8-e7-f5/g6.

Mit Ausnahme der beiden Möglichkeiten Se7-f5/g6 stehen nun alle 34 schwarzen Züge exakt fest.

Aufgrund des Zügevorrats aus *CarCar* (ohne den letzten Zug) besucht Weiß nicht die Felder g2, c4, a5, a6, g6, f7, b8, c8 und e8. Der Original-Bc2 zieht nicht und wird auf c2 geschlagen. Vor dem Zug sTb2xc2 kann Weiß nicht das Feld c2 besuchen. Da Schwarz keinen Stein nach c3 bringt, kann der Zug b2xc3 nicht in der Lösung vorkommen, so dass der Original-Bb2 nicht ziehen kann und durch Tb4xb2 geschlagen wird. Deshalb besucht Weiß vor dem Zug sTb4xb2 auch nicht das Feld b2; und auch das Feld b3 kann Weiß nicht vor sTb4xb2 besuchen, denn dies wäre allenfalls durch wTb1-b6 denkbar, was durch den Bb2 verhindert wird. Also besuchen die schwarzen Züge Tb2-c2 und c5-c4 jeweils im Partieverlauf ein Feld erstmals, die Züge Tb4-b2 und a7-a5 je zwei Felder und O-O-O mindestens zwei Felder.

Von den 34 schwarzen Zügen kommen 29 nicht als letzter Zug der Partie in Frage, weil danach jeweils im Partieverlauf noch weitere Züge anstehen. Für den letzten Zug gibt es somit fünf Kandidaten: O-O-O, Tb2-c2, Le4-g2, a7-a5, c5-c4. Jeder dieser fünf Züge verliert mindestens ein Feld (klar), die beiden Züge O-O-O und a7-a5 sogar mindestens zwei. In der Lösung *P\_2* wird das 59. Feld im 29. Zug von Schwarz besucht, d.h. für eine optimale Lösung dürfen wir im 34. schwarzen Zug nur ein Feld verlieren und benötigen davor vier schwarze (und fünf weiße) Freizüge. Die beiden Züge O-O-O und a7-a5 scheidern damit als letzter Zug aus, aber auch vor Tb2-c2 und c5-c4 ist kein schwarzer Freizug möglich. Deshalb muss 34... Le4-g2 der letzte Zug sein, und in den vier Zügen davor (Züge Nr. 30-33) muss das Manöver Le8-h5-g6-f5-e4 geschehen. Die letzten fünf schwarzen Züge der optimalen Lösung stehen damit fest.

Insbesondere können wir nun schließen, dass der Zug Se7-f5/g6 im Partieverlauf vor Le8-h5-g6-f5 erfolgen muss. Um dem sL den Weg freizumachen, muss der sS geschlagen werden. Dies gelingt nur durch den Schlag wLg4xf5. Der Zug Se7-g6 scheidet also aus, und wir haben in der Lösung das Manöver Sg8-e7-f5.

Im 29. schwarzen Zug bestehen wieder fünf Möglichkeiten: O-O-O, Tb2-c2, La4-e8, a7-a5, c5-c4. Keiner davon ist ein Freizug. Angesichts der Lösung *P\_2*, die wir bereits kennen, dürfen wir im 29. schwarzen Zug nur ein Feld verlieren und benötigen davor einen schwarzen Freizug (und zwei weiße). Dies gelingt nur durch 29... La4-e8 in Verbindung mit dem Freizug 28... Sc6-e7. Insgesamt stehen damit die letzten sieben schwarzen Züge der Lösung fest (Nr. 28-34).

Es folgt nun weiter, dass die beiden Züge Td6-b6 und Ld7-a4 im Partieverlauf vor Sb8-c6 stattfinden müssen, also auch vor O-O-O. Insgesamt sind damit 21 schwarze Züge im Partieverlauf vor O-O-O erforderlich: Dd8-c7, Th8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6, Lc8-d7-a4, Lf8-b4, Sb8-c6, Sg8-e7-f5, c7-c5, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Schwarz rochiert also frühestens im 22. Zug. Da insbesondere die Züge f7-f5 und Tf7-h7 vor O-O-O geschehen, steht bei der Ausführung der Rochade kein Stein (weder ein weißer noch ein schwarzer) auf f7 oder g6. Damit Schwarz bei der Ausführung der Rochade nicht im Schach steht, darf also zum Zeitpunkt von sO-O-O kein wL auf h5 stehen.

Für den Schlag auf f5 benötigen wir in der Partie das weiße Läufermanöver Lf1-d3-e2-h5-g4 und Lg4-f5. Zwischen den beiden Zügen Lh5-g4 und Lg4-f5 kann (beliebig oft) das Pendelmanöver Lg4-f3-g4 eingeschoben werden. Sobald der wL das Feld f5 erreicht hat, kann er dieses nicht mehr selbst ziehend verlassen, d.h. er wird durch 32... Lg6xf5 geschlagen. Zur Vorbereitung von sTf8-f6 ist der Bauernzug f7-f5 erforderlich, und zur Ermöglichung von sTf6-f5 muss dann der sBf5 geschlagen werden, was nur durch den En-passant-Schlag e5xf6 möglich ist. Wir haben in der Partie also die weiße Bauernwanderung e2-e4-e5xf6. Der Original-Lf8 räumt das Feld f8 für Th8-f8 und muss dann von Weiß geschlagen werden, bevor sTb6-b4 geschehen kann. Dieser Schlag ist nur durch a3xb4 möglich, d.h. wir haben in der Partie die weißen Bauernzüge a2-a3xb4.

Im 27. Zug von Schwarz gibt es die Möglichkeiten O-O-O, Tb2-c2, a7-a5 und c5-c4. Keiner davon ist ein Freizug. Da die Lösung P\_2 im 27. schwarzen Zug nur ein Feld verliert, kommen für jede optimale Lösung im 27. Zug nur die beiden Zugmöglichkeiten Tb2-c2 und c5-c4 in Frage.

Bevor Weiß Le2-h5 spielt, ist in der Partie nicht der Bauernzug h4-h5 möglich – denn der wBh5 könnte das Feld nicht selbst ziehend wieder verlassen, so dass er vor wLe2-h5 von Schwarz geschlagen werden müsste; dies ginge nur durch 30... Le8xh5, aber nach 31... Lh5-g6 hätte Weiß dann nicht mehr genügend Zeit für das Manöver Le2-h5-g4-f5. Also wird das Feld h5 im Partieverlauf erstmals durch den Zug Le2-h5 besucht.

Wir untersuchen nun, welche Züge Weiß in den ersten 27 Zügen der Partie zwingend unterbringen muss.

Um sTf7-f5 und sTb6-b4 zu ermöglichen, sind die Bauernwanderungen a2-a3-b4 und e2-e4-e5-f6 erforderlich. Um das Feld h5 zu besuchen, benötigen wir Lf1-d3-e2-h5. Für den Besuch auf dem Feld f2 ist der Zug Kg3-f2 erforderlich und zur Vorbereitung O-O, Kg1-h2-g3, Sg1-f3, h2-h4 und f2-f3. Für das Feld a1 benötigen wir Te1-a1, Sb1-c3, Lc1-e3, d2-d4 und Dd1-g4, und für das Feld h1 ist der Zug Tb1-h1 erforderlich und dafür zur Vorbereitung Tf1-e1 (nach der Rochade O-O). Damit sind 22 weiße Züge exakt bekannt, die in den ersten 27 Zügen der Partie vorkommen müssen.

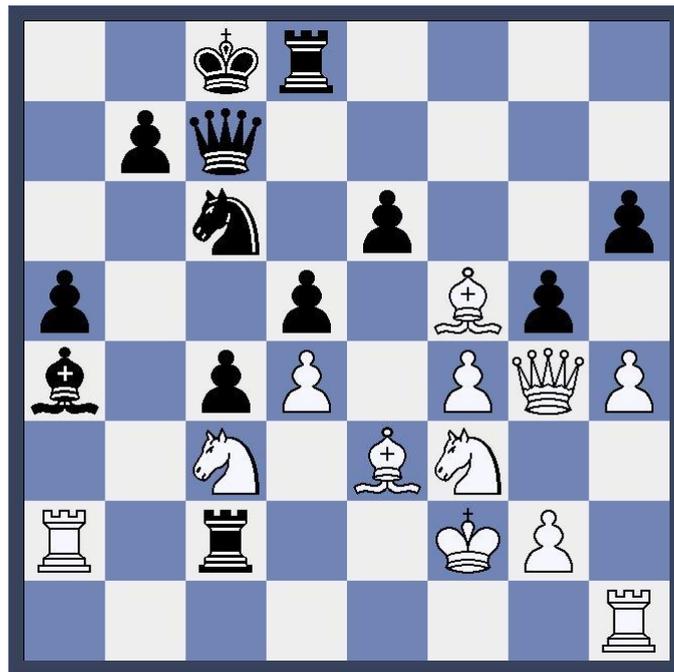
Für das Feld f4 benötigen wir einen der beiden Züge Le3-g5 oder f3-f4. Zur Vorbereitung des Zuges Tb1-h1 ist ein Turmzug erforderlich, der auf dem Feld b1 endet.

Das Feld a2 muss entweder durch Ta1-a2 oder durch Kb1-a2 besucht werden. Für Kb1-a2 würde der wK von f2 aus allerdings fünf Züge benötigen, und dann hätten wir insgesamt schon 29 Züge, die in den ersten 27 Zügen vorkommen müssen. Also bleibt nur die Möglichkeit Ta1-a2 übrig. Wir kennen somit 23 der ersten 27 Züge exakt, hinzu kommt noch einmal entweder Le3-g5 oder f3-f4 und einmal T-b1. Zwei Züge sind vorläufig noch komplett frei.

Für den Turmzug nach b1 stehen aus *CarCar* grundsätzlich die vier Zugmöglichkeiten Ta1-b1, Tb2-b1, Te1-b1 und Th1-b1 zur Verfügung. Falls der Zug Tb2-b1 Anwendung findet, so ist davor ein weiterer Bereitstellungszug erforderlich, um den wT nach b2 zu bringen. Im Fall von Th1-b1 ist ebenfalls ein Bereitstellungszug nötig, weil der Original-Th1 sein Ursprungsfeld ja durch die Rochade verlässt. Und auch im Fall von Te1-b1 brauchen wir einen zusätzlichen Bereitstellungszug (zusätzlich zu dem bereits bekannten Tf1-e1), weil wir dann mit Te1-a1 und Te1-b1 sogar zwei Turmzüge haben, die auf dem Feld e1 beginnen. Wir können alle diese Fälle zum gegenwärtigen Zeitpunkt noch nicht ausschließen, aber jedenfalls dürfen wir die folgende Erkenntnis festhalten: Wenn die wTT in den ersten 27 Zügen mit nur fünf Zügen (ohne die Rochade) auskommen sollen, dann wird dazu der Zug Ta1-b1 benötigt. Wir haben dann die beiden Zugfolgen Tf1-e1-a1 und Ta1-b1-h1 und den Zug Ta1-a2. Die Wege der beiden wTT enden dann auf den Feldern a2 und h1, und es ist leicht einzusehen, dass unter diesen Umständen nicht der Damenturm nach h1 und der Königsturm nach a2 wandern kann.

Wir können deshalb notieren: Falls die wTT in den ersten 27 Zügen nur fünfmal ziehen (ohne die Rochade), so führen sie die Manöver Ta1-a2 und Tf1-e1-a1-b1-h1 aus.

Ist es möglich, dass der Original-Lf1 in den ersten 27 Zügen fünfmal zieht? Wenn dies der Fall ist, dann muss der wL neben den bereits bekannten Zügen Lf1-d3-e2-h5 die beiden Züge verbrauchen, die bisher noch frei sind. Der Original-Sf3 kann dann von f3 aus keinen zweiten Zug mehr ausführen, d.h. er steht nach 27 Zügen noch auf f3. Auf f3 haben wir deshalb weder wL noch wB, d.h. der wL ist in fünf Zügen bis nach f5 gewandert (nicht nach f3), und der weiße f-Bauer muss von f3 aus noch den Zug f3-f4 ausgeführt haben. Für die wTT stehen (außer der Rochade) in den ersten 27 Zügen zusammen nur fünf Züge zur Verfügung, was nur mit den Manövern Ta1-a2 und Tf1-e1-a1-b1-h1 geht. Die Stellung nach 27,0 Zügen ist deshalb vollständig bekannt (Analysediagramm):

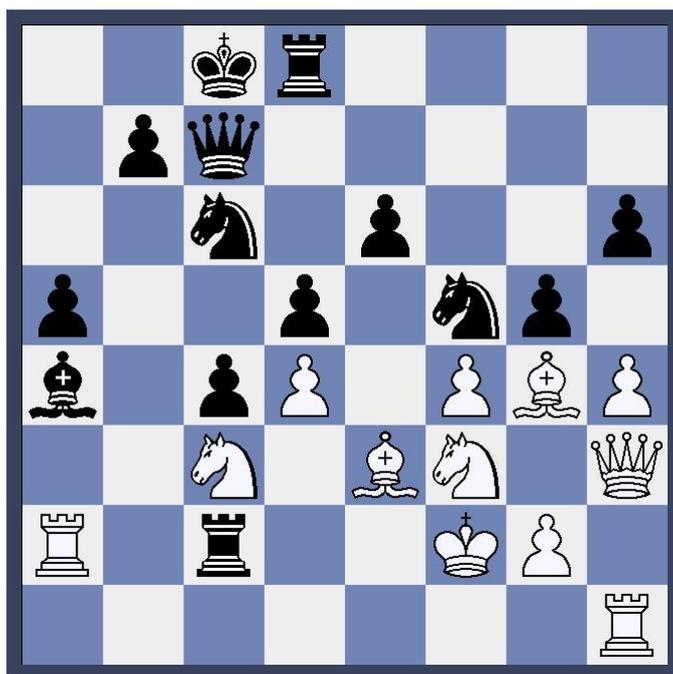


Im Rückwärtsspiel aus dieser Stellung heraus müsste Schwarz zunächst den Zug 27... Tb2xc2+ zurücknehmen (wegen des Schachs). Weiß hätte im 27. Zug die beiden Möglichkeiten Kg3-f2 und Tb1-h1, die jeweils genau ein Feld verlieren. Davor müsste 26... c5-c4 geschehen (verliert ein Feld), und davor würde angesichts von P\_2 ein Freizug von Weiß benötigt. Vor 27. Kg3-f2 gibt es keinen solchen Freizug, deshalb wäre 27. Tb1-h1 und 26. Ta1-b1 erforderlich. Schwarz müsste im 25. Zug durch Tb4xb2 oder a7-a5 zwei Felder verlieren, und davor stünde für Weiß dann im 25. Zug kein weiterer Freizug zur Verfügung. Damit wäre dann klar, dass die hier konstruierte Partie gemäß den Wettbewerbskriterien gegenüber der Partie P\_2 das Nachsehen hätte – Widerspruch.

Wir können also schließen, dass der Original-Lf1 in den ersten 27 Zügen höchstens viermal zieht.

Insbesondere erreicht der wL in den ersten 27 Zügen noch nicht das Feld f5, woraus folgt, dass in der Position nach 27 Zügen auf f5 noch ein sS steht. Der wK ist über g3 nach f2 gewandert, und das Feld g3 muss er dabei betreten haben, bevor der sS nach f5 gelangt ist. Der Königszug Kg3-f2 ist entweder vor sSe7-f5 oder spätestens als unmittelbare Antwort darauf geschehen.

Ist es möglich, dass der Original-Lf1 in den ersten 27 Zügen viermal zieht? In diesem Fall verbraucht der wL einen der beiden Züge, die noch frei sind, und er muss das Manöver Lf1-d3-e2-h5-g4 ausführen. Auf g4 kann dann nach 27 Zügen nicht die wD stehen, d.h. die wD benötigt nach Dd1-g4 noch einen zweiten Zug – nämlich Dg4-h3. Damit stehen dann wieder alle 27 weißen Züge fest, und die Stellung nach 27,0 Zügen ist vollständig bekannt (Analysediagramm):



Wieder muss Schwarz im 27. Zug das Schach zurücknehmen: 27... Tb2xc2+. Wegen des wSf3 muss der Zug wLe2-h5 im Partieverlauf vor wSg1-f3 stattgefunden haben, also auch vor wO-O, also auch vor wKh2-g3, also auch vor sSe7-f5, also auch vor sTh7-d7, also auch vor sTd6-b6, also auch vor sSb8-c6, also auch vor sO-O-O. Da der wL zum Zeitpunkt von sO-O-O nicht auf h5 stehen durfte, ist also auch der Zug wLh5-g4 bereits vor sO-O-O geschehen. Im 27. Zug kann Weiß deshalb nicht den Zug Lh5-g4 zurücknehmen; außerdem auch nicht Kg3-f2 (wegen des Schachs durch sSf5). Es bleibt nur 27. Tb1-h1, davor 26... c5-c4, davor 26. Ta1-b1, davor 25... Tb4xb2, und im 25. Zug von Weiß steht nun wieder kein Freizug zur Verfügung – Widerspruch.

Wir wissen damit nun, dass der Original-Lf1 in den ersten 27 Zügen der Partie nur dreimal zieht: Lf1-d3-e2-h5. Der wL steht nach 27 Zügen auf dem Feld h5, und er kann dorthin erst nach der schwarzen Rochade gelangt sein.

Hätten wir nun im Partieverlauf den Zug wLe2-h5 vor wSg1-f3, so ergäbe sich wieder die folgende Abfolge von Zügen: wLe2-h5, wSg1-f3, wO-O, wKh2-g3, sSe7-f5, sTh7-d7, sTd6-b6, sSb8-c6, sO-O-O; doch dann wäre der wL schon vor der schwarzen Rochade nach h5 gelangt – Widerspruch. Also können wir schließen, dass der Zug wLe2-h5 im Partieverlauf nach wSg1-f3 gespielt wird. Um den Läuferzug zu ermöglichen, muss der wS von f3 aus noch einen zweiten Zug ausführen: Sf3-d2 oder Sf3-g5. Damit ist einer der beiden freien Züge verbraucht, die Weiß in den ersten 27 Zügen noch zur Verfügung standen. Ein Zug ist noch frei.

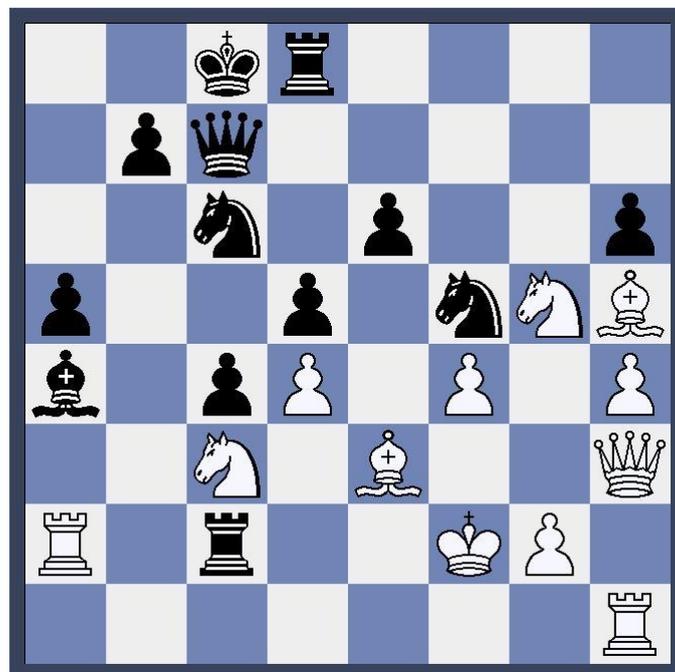
Als nächstes untersuchen wir, ob der Zug wLe2-h5 im Partieverlauf vor wDd1-g4 geschehen kann. Nach Dd1-g4 müssen auf jeden Fall noch die beiden Turmzüge Te1-a1 und Tb1-h1 gespielt werden (in beliebiger Reihenfolge). Außerdem muss nach dem ersten dieser beiden Turmzüge derjenige wT, der den anderen Turmzug ausführen soll, noch einen Bereitstellungszug ausführen (nach e1 oder b1). Nach Dd1-g4 kommen deshalb innerhalb der ersten 27 Züge der Partie noch mindestens drei weiße Turmzüge vor. Wenn wir nun annehmen, dass Le2-h5 vor Dd1-g4 geschieht, so haben wir damit insgesamt fünf weiße Züge, die alle erst nach der schwarzen Rochade erfolgen können. Andererseits haben wir bereits festgestellt, dass sO-O-O frühestens im 22. Zug der Partie möglich ist. Weiß hat damit nur noch genau fünf Züge Zeit, um die fünf genannten Züge unterzubringen: 23. Le2-h5, 24. Dd1-g4, im 25. und 27. Zug müssen Te1-a1 und Tb1-h1 erfolgen (in beliebiger Reihenfolge) und dazwischen im 26. Zug ein Bereitstellungszug eines wT. Jeder der beiden Turmzüge Te1-a1 und

Tb1-h1 verliert mindestens ein Feld (nämlich a1 bzw. h1), so dass Weiß also im 25. und im 27. Zug jeweils mindestens ein Feld verliert. Außerdem muss Schwarz zwingend im 22. Zug rochieren, und in den fünf Zügen danach stehen ihm nur die fünf Züge a7-a5, Tb6-b4, Tb4-b2, Tb2-c2 und c5-c4 zur Verfügung. Da nach Tb6-b4 noch die beiden Züge Tb4-b2-c2 erfolgen müssen, verliert Schwarz damit entweder im 26. Zug zwei Felder oder aber im 26. Zug ein Feld und im 25. Zug zwei Felder. Im Hinblick auf die nachrangigen Wertungskriterien zieht die Partie damit auf jeden Fall gegenüber der Partie  $P_2$  den Kürzeren – denn  $P_2$  verliert ja im 26. und 27. schwarzen und im 27. weißen Zug jeweils genau ein Feld, im 25. schwarzen Zug genau zwei Felder und weist im 25. und 26. weißen Zug Freizüge auf. Im Rückwärtsspiel kann die aktuell betrachtete Partie spätestens im 25. weißen Zug nicht mehr mit  $P_2$  mithalten, da ein Freizug fehlt – Widerspruch.

Damit haben wir bewiesen, dass der Zug Dd1-g4 im Partieverlauf vor Le2-h5 erfolgen muss. Um den Läuferzug zu ermöglichen, muss die wD deshalb das Feld g4 wieder räumen, was nur durch Dg4-h3 möglich ist. Damit ist der letzte noch freie weiße Zug verbraucht. Es folgt weiter, dass die wTT mit fünf Zügen auskommen müssen (ohne Rochade) und dass deshalb in den ersten 27 Zügen die Manöver Ta1-a2 und Tf1-e1-a1-b1-h1 vorkommen müssen.

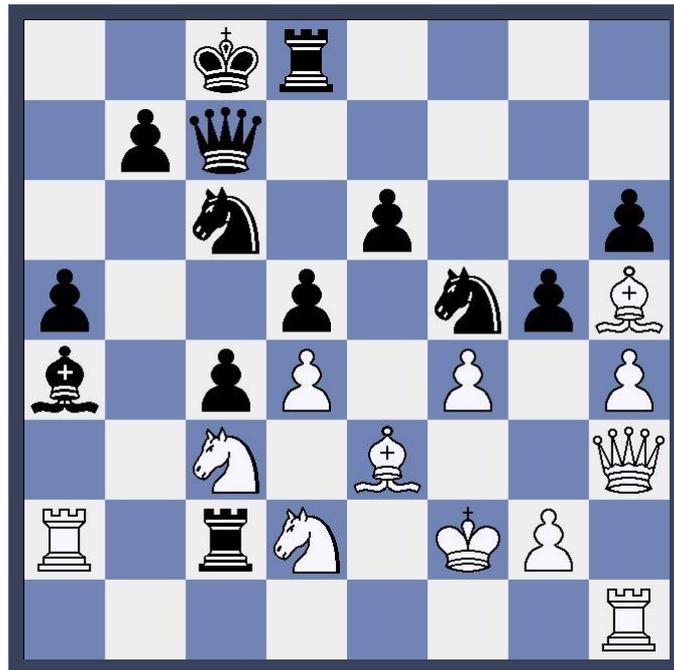
Der Bauernzug f2-f3 geschieht im Partieverlauf vor wKg3-f2, und der Königszug erfolgt wiederum spätestens als unmittelbare Antwort auf sSe7-f5, also insbesondere auch vor sTh7-d7 und damit vor sTd6-b6, sSb8-c6, sO-O-O und wLe2-h5. Um den wL durchzulassen, muss der wB deshalb das Feld f3 räumen, was nur durch f3-f4 möglich ist. Damit kennen wir nun schon 26 der ersten 27 weißen Züge exakt (O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4-h3, Ta1-a2, Tf1-e1-a1-b1-h1, Lc1-e3, Lf1-d3-e2-h5, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3-b4, d2-d4, e2-e4-e5-f6, f2-f3-f4, h2-h4), und der letzte verbleibende Zug lautet entweder Sf3-d2 oder Sf3-g5.

Doch auch den zweiten Zug des Königsspringers können wir nun noch eindeutig herleiten: Wenn der wS von f3 aus nach g5 weiterzöge, so ergäbe sich nach 27,0 Zügen die folgende Position (Analysediagramm):



Weiß stünde im Schach und müsste dieses im 28. Zug parieren. Aber keiner der acht Züge, die in dieser Stellung legal wären, kommt in *CarCar* vor – Widerspruch.

Damit wissen wir, dass Weiß in den ersten 27 Zügen der Partie Sf3-d2 ziehen muss, und insgesamt ist die Position nach 27,0 Zügen eindeutig bekannt:



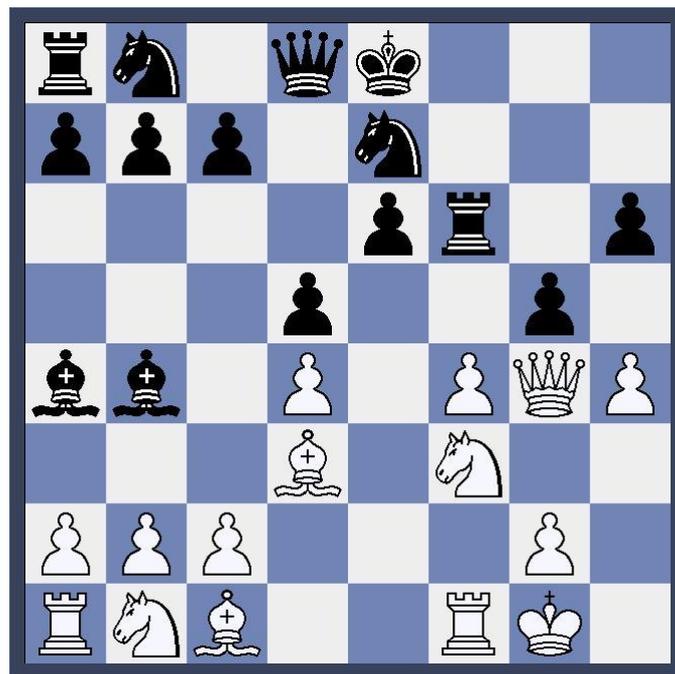
Aus dieser Stellung heraus sind die ersten 27,0 Züge der Partie nun sukzessive so zurückzunehmen, dass sie jeweils möglichst wenige Felder verlieren. Es zeigt sich, dass der Partieverlauf im Rückwärtsspiel zumindest bis zum 12. schwarzen Zug (einschließlich) leicht zu überblicken ist:

Schwarz nimmt im 27. und 26. Zug die beiden Züge Tb2xc2 und c5-c4 zurück (in beliebiger Reihenfolge), die jeweils nur ein Feld verlieren. Im 25. Zug ist ein Zug erforderlich, der zwei Felder verliert. Das könnte grundsätzlich a7-a5 oder Tb4xb2 sein, aber hierbei gebührt dem Turmzug der Vorrang, weil er im weiteren Rückwärtsspiel den Freizug Tb6xb4 ermöglicht. Also erhalten wir 25... Tb4xb2 und 24... Tb6xb4. Davor ist 23... a7-a5 der einzige Zug, der nur zwei Felder verliert, und davor ist 22... O-O-O erzwungen. Die Rochade ermöglicht den eindeutigen Freizug 21... Sb8-c6. Im 20. Zug besteht die Auswahl zwischen den beiden Zügen Dd8-c7 und Td6-b6, die jeweils nur genau ein Feld verlieren. Der Vorrang gebührt hier dem Turmzug, weil er im weiteren Rückwärtsspiel drei Freizüge bringt (der Damenzug schafft hingegen nur einen Freizug). Also ergibt sich 20... Td6-b6, 19... Td7-d6, 18... Th7-d7 und 17... Se7-f5. Davor ist 16... Dd8-c7 der einzige Zug, der nur ein Feld verliert, und davor ist 15... c7-c5 wiederum der einzige Freizug. Der Zug 14... Tf7-h7 ist der einzige, der nur zwei Felder verliert, und davor ergeben sich die beiden Freizüge 13... Tf5-f7 und 12... Tf6-f5.

Bei Weiß ist zu beachten, dass die Züge Dg4-h3, Sf3-d2 und f3-f4 alle im Partieverlauf vor Le2-h5 geschehen müssen und dass Kg3-f2 spätestens als unmittelbare Antwort auf sSe7-f5 geschieht. Im 27. Zug stehen für die Rücknahme deshalb nur die beiden Möglichkeiten Tb1-h1 und Le2-h5 zur Verfügung. Hierbei setzt sich der Läuferzug durch, weil er mit Dg4-h3, Sf3-d2 und Ld3-e2 gleich drei Freizüge ermöglicht – der Turmzug schafft nur den einen Freizug Ta1-b1. Also erhalten wir 27. Le2-h5, und in den Zügen davor geschehen die drei genannten weißen Freizüge, zu denen in den Zügen Nr. 23-24 durch den Entschlag 24... Tb6xb4 als vierter Freizug noch a3xb4 hinzutritt. Die weißen Züge Nr. 23-27 sind damit vier Freizüge. Davor sind die drei Züge 22. Tb1-h1, 21. Ta1-b1 und 20. Te1-a1 jeweils erzwungen. Im weiteren Rückwärtsspiel (beginnend mit dem 19. Zug) stehen Weiß nun eine Reihe von Zugmöglichkeiten zur Verfügung, die alle genau ein Feld verlieren. Keiner davon ermöglicht durch die Rücknahme einen Freizug, so dass diese Züge grundsätzlich alle gleichwertig sind und in beliebiger Reihenfolge zurückgenommen werden können. Im 19. Zug bestehen zunächst

die Möglichkeiten Tf1-e1, Ta1-a2, Lc1-e3 und Sb1-c3; im weiteren Verlauf des Rückwärtsspiels kommt dann noch a2-a3 hinzu (sobald Ta1-a2 geschehen ist) sowie außerdem die dreizügige Königswanderung Kg1-h2-g3-f2, die spätestens im 18. Zug der Partie enden muss (wegen 17... Se7-f5). Insgesamt verfügt Weiß damit über einen Vorrat von acht Zügen, die alle genau ein Feld verlieren. In den sieben Zügen Nr. 13-19 werden davon sieben zurückgenommen. Die Zugmöglichkeiten O-O und h2-h4, die zwischendurch ebenfalls entstehen, scheiden aus, weil sie jeweils zwei Felder verlören.

Natürlich wäre es nun naheliegend, auch im 12. weißen Zug noch den letzten verbliebenen der erwähnten Züge zurückzunehmen. Wenn dies gelänge, hätte die Partie nach den Wettbewerbskriterien sogar Vorrang gegenüber P\_2. Verlöre Weiß auch im 12. Zug nur ein Feld, so ergäbe sich dadurch die folgende eindeutige Position nach 11,0 Zügen (Analysediagramm):



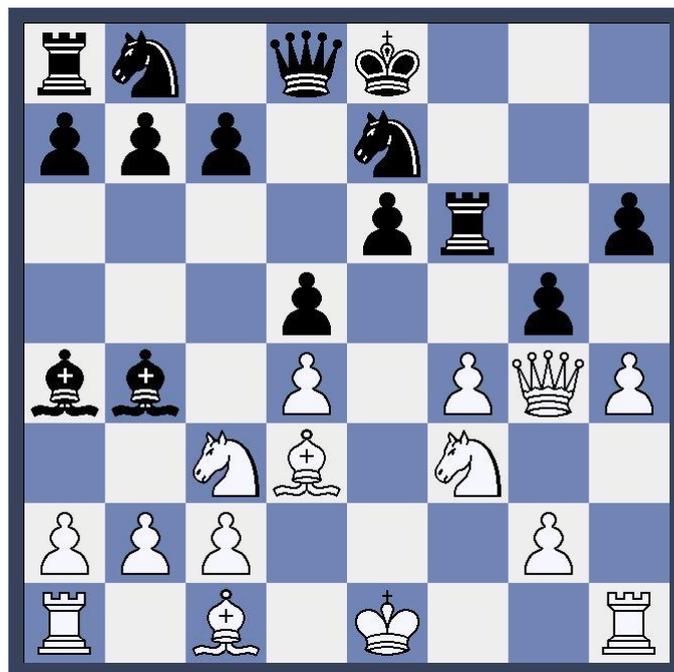
Unter diesen Bedingungen müssten offenbar die sieben weißen Züge d2-d4, e2-e4, f2-f3-f4, Dd1-g4, Lf1-d3 und Sg1-f3 alle vor der Rochade stattfinden, d.h. die Rochade geschähe frühestens im 8. Zug von Weiß. Zum Zeitpunkt der Rochade wären die beiden Felder d2 und c3 frei, und deshalb dürfte der sL noch nicht auf b4 stehen. Der Zug sL8-b4 dürfte frühestens im 8. Zug von Schwarz geschehen, und danach käme noch Sg8-e7 und Th8-f8-f6. Die Rochade müsste also genau im 8. Zug geschehen (nicht später), und die vier Züge Nr. 8-11 von Schwarz stünden eindeutig fest. Der Bauernzug f7-f5 wäre nicht dabei, müsste also bereits in den ersten sieben Zügen der Partie erfolgen. Doch dann müsste auch der En-passant-Schlag e5xf6 als unmittelbare Antwort auf f7-f5 bereits in den ersten acht Zügen der Partie geschehen – im Widerspruch zur Liste der ersten acht weißen Züge (einschließlich 8. O-O), die wir gerade hergeleitet haben.

Also können wir schließen, dass Weiß im 12. Zug einen Zug zurücknimmt, der mindestens zwei Felder verliert. Dafür kommen grundsätzlich die beiden Kandidaten O-O und h2-h4 in Frage. Von den acht Zügen, die jeweils genau ein Feld verlieren (Kg1-h2-g3-f2, Ta1-a2, Tf1-e1, Lc1-e3, Sb1-c3, a2-a3), sind in den Zügen Nr. 13-19 genau sieben zurückgenommen worden; auf einen dieser Züge wurde verzichtet. Allerdings kann sowohl im Fall 12. O-O als auch im Fall 12. h2-h4 die Königswanderung Kg1-h2-g3-f2 erst nach dem 12. Zug von Weiß beginnen, d.h. diese drei Züge gehören auf jeden Fall zu den Zügen Nr. 13-19. Außerdem kann Ta1-a2 erst nach a2-a3 geschehen, woraus folgt, dass auch

der Zug Ta1-a2 in den Zügen Nr. 13-19 dabei sein muss. Von den vier Zügen Tf1-e1, Lc1-e3, Sb1-c3 und a2-a3 finden drei in den Zügen Nr. 13-19 statt und einer bereits vor dem 12. Zug.

Bei der Analyse des weiteren Rückwärtsspiels ist es nun wichtig zu beachten, dass der En-passant-Schlag e5xf6 im Partieverlauf unmittelbar auf f7-f5 folgen muss – oder umgekehrt ausgedrückt: Wenn Weiß den Zug e5xf6 (Freizug!) zurücknimmt, so muss Schwarz im Rückwärtsspiel darauf mit f7-f5 antworten. Der schwarze Zug f7-f5 verliert aber zwei Felder, während h7-h6 nur ein Feld verliert. Deshalb ist es im Hinblick auf die Wettbewerbskriterien nützlich, wenn Schwarz im Rückwärtsspiel zuerst h7-h6 zurücknimmt und die Rücknahme von f7-f5 hinauszögert.

Im 11. schwarzen Zug gibt es die beiden Zugmöglichkeiten Tf8xf6 und h7-h6, die beide genau ein Feld verlieren. Die Züge Ld7-a4 und g7-g5 scheiden aus, weil sie jeweils mindestens zwei Felder verlören. Angesichts der Partie *P\_2* wissen wir, dass im 11. weißen Zug nun ein Freizug erforderlich ist. Dieser Freizug darf aber nicht der En-passant-Schlag e5xf6 sein, weil Schwarz dann gezwungen wäre, im 10. Zug mit f7-f5 zwei Felder zu verlieren. Also benötigt Weiß im 11. Zug einen anderen Freizug als e5xf6. Im Fall von 12. h2-h4 gibt es keinen solchen Freizug, so dass wir schließen können, dass im 12. weißen Zug die Rochade zurückgenommen wird. Damit ist dann auch klar, dass zum Zeitpunkt der Rochade der wSc3 als Schachschutz benötigt wird: Der Zug Sb1-c3 durfte in den Zügen Nr. 13-19 noch nicht zurückgenommen werden. Es ergibt sich die folgende eindeutige Position nach 11,0 Zügen:



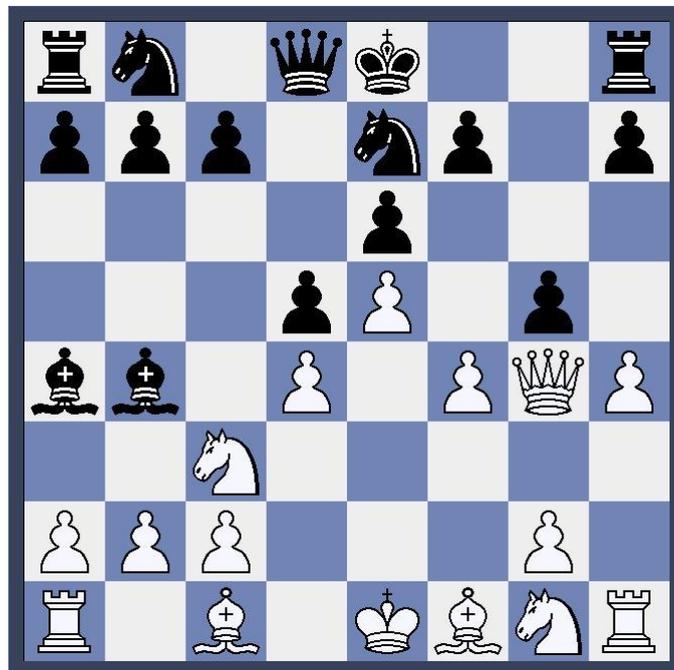
Wie bereits gesagt, nimmt Schwarz aus dieser Stellung im 11. Zug einen der beiden Züge Tf8xf6 oder h7-h6 zurück. Im 11. Zug von Weiß haben wir einen der beiden Freizüge Lf1-d3 oder Sg1-f3. Im 10. Zug gibt es für Schwarz nur genau einen Zug, der genau ein Feld verliert, nämlich den verbliebenen der beiden Züge Tf8xf6 und h7-h6. Die beiden schwarzen Züge Nr. 10-11 lauten also in jedem Fall Tf8xf6 und h7-h6 (in beliebiger Reihenfolge).

Im 10. Zug hat Weiß nun zwei Freizüge zur Auswahl: Entweder spielt er den verbliebenen der beiden Züge Lf1-d3 und Sg1-f3 oder aber den En-passant-Schlag e5xf6. Schwarz muss im 9. Zug mit einem Zug antworten, der genau zwei Felder verliert. Im Fall von 10. e5xf6 ist dies natürlich der Zug f7-f5, während im Fall von 10. Lf1-d3 oder 10. Sg1-f3 die beiden Kandidaten Th8-f8 und g7-g5 in Frage kommen (jedoch nicht Ld7-a4, was sogar drei Felder verlöre).

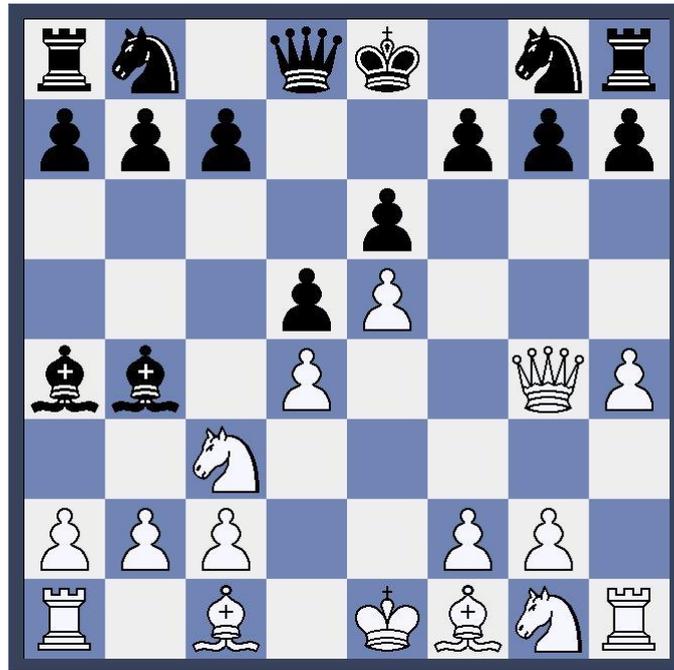
Im 9. Zug nimmt Weiß nun den letzten verbliebenen der drei Freizüge Lf1-d3, Sg1-f3 und e5xf6 zurück. Im Fall von 9. e5xf6 spielt Schwarz davor 8... f7-f5, während im Fall von 9. Lf1-d3 oder 9. Sg1-f3 Schwarz bereits im 9. Zug den Bauernzug f7-f5 zurückgenommen hat und jetzt im 8. Zug die Auswahl zwischen Th8-f8 und g7-g5 hat. In jedem Fall nimmt Schwarz im 8. und im 9. Zug zwei Züge zurück, die jeweils genau zwei Felder verlieren, und außerdem ist der Zug f7-f5 in jedem Fall dabei (entweder im 8. oder im 9. Zug).

Im 8. Zug muss Weiß ein Feld verlieren, und dafür stehen grundsätzlich die Kandidaten e4-e5 und f3-f4 zur Verfügung (nicht jedoch Dd1-g4, d2-d4 oder h2-h4, die jeweils zwei Felder verlören). Der Zug 8. Sb1-c3 istd nicht möglich, weil Schwarz davor das Schach durch den Lb4 nicht zurücknehmen könnte.

Im 7. Zug verfügt Schwarz über den Freizug Sg8-e7 – allerdings nur dann, wenn er im 8. oder 9. Zug bereits den Turmzug Th8-f8 zurückgenommen hat. Wir können deshalb schließen, dass der Zug Th8-f8 in den Zügen Nr. 8-9 tatsächlich dabei war und der Zug g7-g5 im Rückwärtsspiel folglich noch aussteht. Die Position nach 7,5 Zügen ist eindeutig:



Wie schon erwähnt, geschieht aus dieser Stellung im Rückwärtsspiel zunächst im 8. weißen Zug e4-e5 oder f3-f4 und dann 7... Sg8-e7. Im 7. weißen Zug ergibt sich nun im Fall von 8. f3-f4 der Freizug 7. f2-f3, während es im Fall von 8. e4-e5 keinen Freizug gibt. Also können wir schließen, dass 8. f3-f4 und 7. f2-f3 geschehen muss. Im 6. schwarzen Zug ist g7-g5 der einzige Zug, der nur zwei Felder verliert. Es ergibt sich die folgende Stellung nach 5,5 Zügen:



Im 6. und 5. Zug nimmt Weiß nun die beiden Züge e4-e5 und Sb1-c3 zurück (in beliebiger Reihenfolge), die jeweils nur ein Feld verlieren. Schwarz muss im 5. Zug einen der beiden Läuferzüge Ld7-a4 oder Lf8-b4 zurücknehmen, die beide jeweils genau drei Felder verlieren. Die Möglichkeit 5... Ld7-a4 scheidet hierbei aber aus, weil Schwarz im Rückwärtsspiel spätestens als Antwort auf Sb1-c3 den Läuferzug Lf8-b4 zurücknehmen muss (wegen des Schachs), und dann ergäbe sich 5... Ld7-a4 und 4... Lf8-b4, während andererseits im Fall von 5... Lf8-b4 die Möglichkeit 4... e7-e6 besteht, die nur ein Feld verliert. Also erhalten wir 5... Lf8-b4 und 4... e7-e6, und die ersten drei schwarzen Züge der Partie stehen dann eindeutig fest (3.... Ld7-a4, 2... Lc8-d7, 1... d7-d5).

Weiß hat im 4. und 3. Zug nochmals die freie Auswahl zwischen den Zügen d2-d4 und h2-h4, die jeweils genau zwei Felder verlieren – und damit weniger als der Zug Dd1-g4. Die ersten beiden weißen Züge stehen schließlich fest: 2. Dd1-g4 und 1. e2-e4.

Damit ist nachgewiesen, dass die Partie  $P_2$  tatsächlich eine optimale Lösung unserer modifizierten Aufgabenstellung ist.

We die Analyse gezeigt hat, sind die 34 schwarzen Züge, die in einer optimalen Lösung vorkommen, bis auf die Reihenfolge eindeutig bestimmt. Außerdem steht für 28 dieser 34 Züge sogar die Position in der Zugreihenfolge eindeutig fest (Züge Nr. 1-7, 12-25, 28-34). Die verbleibenden sechs Züge bilden drei Paare: Die beiden Züge Nr. 8+9 (Th8-f8 und f7-f5) können in beliebiger Reihenfolge in der Partie auftreten, ebenso die beiden Züge Nr. 10+11 (Tf8xf6 und h7-h6) und auch die beiden Züge Nr. 26+27 (Tb2xc2 und c5-c4). Für die schwarze Zugfolge gibt es damit insgesamt  $2 * 2 * 2 = 8$  verschiedene Varianten.

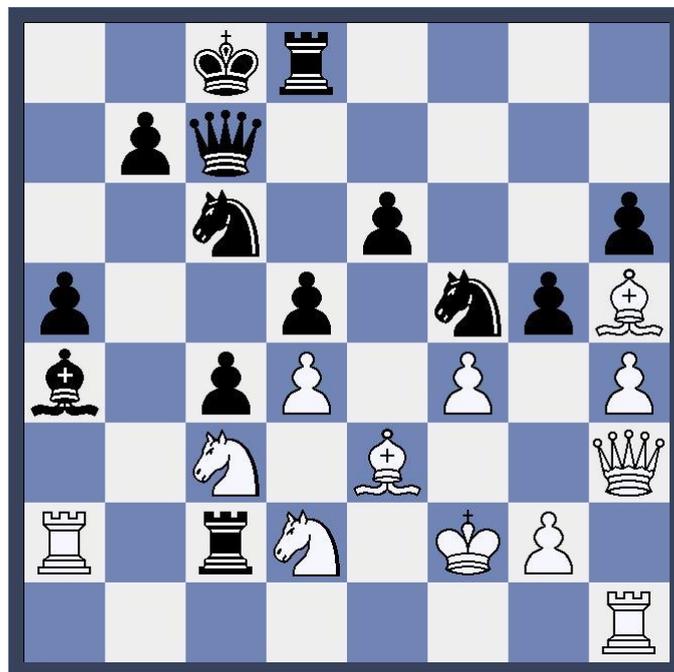
Bei Weiß stehen die ersten 27 Züge der Partie bis auf die Reihenfolge fest (und die nach 27,0 Zügen erreichte Position ist eindeutig bestimmt). In den sieben Zügen der Schlussphase müssen außerdem die beiden Züge Lh5-g4 und Lg4xf5 vorkommen. Die genaue Position im Partieverlauf ist für neun Züge bekannt (Züge Nr. 1-2, 7-8, 12, 20-22, 27). Über die verbleibenden 18 der ersten 27 weißen Züge lässt sich Folgendes feststellen:

- Die beiden Züge Nr. 3-4 (d2-d4 und h2-h4) sind in der Reihenfolge frei (2 Möglichkeiten).
- Auch die beiden Züge Nr. 5-6 (Sb1-c3 und e4-e5) sind in der Reihenfolge frei (2 Möglichkeiten).

- Von den drei Zügen Nr. 9-11 (Lf1-d3, Sg1-f3, e5xf6) ist die Position des En-passant-Schlags e5xf6 in der Zugreihenfolge durch die Position des schwarzen Zugs f7-f5 determiniert, d.h. bei vorgegebener schwarzer Zugfolge liegt die Position von e5xf6 fest. Die beiden anderen Züge können beliebig auf die beiden verbleibenden Zugnummern verteilt werden (2 Möglichkeiten).
- In den sieben Zügen Nr. 13-19 kommt die dreizügige Zugfolge Kg1-h2-g3-f2 vor, und diese muss sogar spätestens mit dem 18. Zug beendet sein. Es gibt  $(6*5*4)/(1*2*3) = 20$  Möglichkeiten, die drei Königszüge auf die sechs Zugnummern 13-18 zu verteilen. Die übrigen vier Züge (a2-a3, Ta1-a2, Lc1-e3, Tf1-e1) nehmen die übrigen vier Zugnummern von 13-19 ein. Ihre Reihenfolge ist frei wählbar, mit der einzigen Einschränkung, dass a2-a3 vor Ta1-a2 geschehen muss. Bei vorgegebener Verteilung der Königszüge auf die Zugnummern sind das 12 Möglichkeiten für die Reihenfolge der verbleibenden vier Züge. Insgesamt erhalten wir für die weißen Züge Nr. 13-19 damit  $20 * 12 = 240$  Möglichkeiten.
- Unter den vier Zügen Nr. 23-26 (Dg4-h3, Ld3-e2, Sf3-d2, a3xb4) ist die Reihenfolge grundsätzlich beliebig, wobei allerdings der Bauernschlag a3xb4 bereits in einem der beiden Züge 23-24 vorkommen muss. Das ergibt 12 Möglichkeiten für diese vier Züge.

Für die ersten 27,0 Züge der Partie gibt es damit insgesamt  $8 * 2 * 2 * 2 * 240 * 12 = 184.320$  verschiedene Varianten. Alle münden nach 27,0 Zügen in die gleiche Stellung.

Die Schlussphase der Partie besteht aus den letzten sieben Zügen (Züge Nr. 28-34). Die schwarzen Züge in der Schlussphase stehen fest. Weiß spielt die beiden Züge Lh5-g4 und Lg4xf5 und macht ansonsten fünf beliebige Abwartezüge. Wir wollen nun noch die Gesamtzahl der möglichen Verläufe der Schlussphase und die Anzahl der möglichen Schlussstellungen bestimmen. Dazu rekapitulieren wir nochmals die Stellung nach 27,0 Zügen, die bereits weiter oben als Diagramm gezeigt wurde:



Natürlich müssen alle sieben weißen Züge der Schlussphase von den zwölf weißen Steinen ausgeführt werden, die in der Diagrammstellung noch auf dem Brett stehen. Allerdings hält die Partie *CarCar* für Sc3 und Bd4 keine weiteren Zugmöglichkeiten mehr bereit. Der Bf4 kann nur den Zug f4-f5 ausführen, und dieser ist erst dann möglich, wenn auf f5 zuerst der sS und danach der wL geschlagen worden ist und schließlich auch noch der sL dieses Feld wieder verlassen hat, also nach 33... Lf5-e4. Das bedeutet, dass der Bauernzug f4-f5 nur im letzten weißen Zug der Partie vorkommen kann. Der Le3 kann damit überhaupt nicht ziehen, denn gemäß *CarCar* wäre Le3-g5 sein einziger möglicher Zug,

welcher aber durch den Bf4 verhindert wird. Also bleibt der wL bis zum Schluss der Partie auf dem Feld e3 stehen. Daraus folgt weiter, dass auch der wK nicht ziehen kann – denn für ihn wäre Kf2-e3 der einzig mögliche Zug. Wir haben somit vier weiße Steine identifiziert, die in der Schlussphase nicht ziehen: Kf2, Le3, Sc3, Bd4.

Unter den verbleibenden acht Steinen sind fünf, die jeweils nur höchstens einen Zug machen können:

- Der Sd2 hat den Zug Sd2-f1. Von dort aus kommt er nicht weiter, weil der Le3 den Zug Sf1-e3 verhindert.
- Für den Bf4 haben wir bereits festgestellt, dass der Zug f4-f5 nur im 34. Zug möglich ist. Für einen zweiten Zug ist keine Zeit mehr.
- Der Bh4 hat die einzige Zugmöglichkeit h4-h5 und kommt von h5 aus nicht weiter.
- Die Dh3 kann den Zug Dh3-h2 ausführen.
- Der Bg2 kann den Zug g2-g3 ausführen.

Die drei Figuren Lh5, Ta2 und Th1 können jeweils häufiger als einmal ziehen. Der Läufer zieht sogar mindestens zweimal: Lh5-g4 und Lg4xf5. Die beiden Züge müssen in dieser Reihenfolge gespielt werden. Außerdem muss Lh5-g4 spätestens im 30. Zug geschehen (vor 30... Le8-h5) und Lg4xf5 spätestens im 32. Zug (vor 32... Lg6xf5). Zwischen den beiden Zügen Lh5-g4 und Lg4xf5 ist das (optionale) Pendelmanöver Lg4-f3-g4 möglich – aber nur höchstens einmal, weil der wL nach zwei Pendeln nicht mehr bis zum 32. Zug nach f5 käme. Wenn der wL vier Züge macht, so lassen diese vier Züge sich auf fünf Arten auf die Zugnummern 28-32 verteilen. Wenn der wL nur zweimal zieht, so können die beiden Züge auf neun Arten in der Zugreihenfolge der Partie untergebracht werden.

Die beiden wTT sind in ähnlicher Weise frei beweglich wie wir es im vorangegangenen Anhang A gesehen haben. Sie können diesmal sogar bis zu fünf Züge ausführen und damit einen mehr als im Anhang A; andererseits stehen ihnen wegen des Le3 weniger Zugmöglichkeiten auf der e-Linie zur Verfügung.

Der Ta2 kann diesmal sogar das Feld h1 erreichen (in drei Zügen: Ta2-b2-b1-h1); allerdings muss dazu der Th1 dieses Feld zuvor räumen und braucht zwei Züge, um seinem Kollegen nicht im Weg zu stehen – nämlich Th1-b1-b6. Daraus folgt, dass der Ta2 von h1 aus nicht noch einen vierten Zug ausführen kann.

Umgekehrt kann auch der Th1 das Feld a2 erreichen – nämlich über das vierzügige Manöver Th1-b1-e1-a1-a2. Dafür muss der Ta2 dieses Feld durch Ta2-b2 räumen, und damit sind dann wieder alle Züge verbraucht. Der Th1 kann also von a2 aus nicht noch einen fünften Zug anschließen.

Mit diesen Beobachtungen können wir nun tabellarisch die Züge zusammenstellen, die den beiden wTT insgesamt zur Verfügung stehen:

	<b>Ta2</b>	<b>Th1</b>
<b>Erster Zug</b>	Ta2-b2	Th1-b1
<b>Zweiter Zug</b>	Tb2-b1	Tb1-b6, Tb1-e1, Tb1-h1
<b>Dritter Zug</b>	Tb1-b6, Tb1-e1, Tb1-h1	Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Th1-b1
<b>Vierter Zug</b>	Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2	Ta1-a2, Ta1-b1, Tb1-b6, Tb1-e1, Tb1-h1, Te2-e1
<b>Fünfter Zug</b>	Ta1-a2, Ta1-b1, Tb1-b6, Tb1-e1, Te2-e1	Tb1-b6, Tb1-e1, Tb1-h1, Te1-a1, Te1-b1, Te1-e2, Th1-b1

Die beiden wTT halten sich also in der Schlussphase der Partie stets im Bereich der acht Felder a1, b1, e1, h1, a2, b2, e2, b6 auf. Die Kombination aus genau zwei Zügen des Ta2 und genau einem Zug des Th1 ist offenbar nicht möglich – denn dann würden beide Türme auf dem Feld b1 landen.

Wenn der Sd2 den Zug Sd2-f1 ausführt, so muss er hierfür zunächst entfesselt werden. Da sich weder wKf2 noch sTc2 in der Schlussphase bewegen, kann die Entfesselung nur dadurch herbeigeführt werden, dass einer der beiden wTT nach e2 wandert. Dem Ta2 gelingt dies in vier Zügen – damit sind dann sämtliche weißen Züge verbraucht. Wenn der Th1 nach e2 wandert, benötigt er dafür drei Züge, und ein weiterer Zug bleibt noch frei. Der Th1 kann jedoch nicht in genau vier Zügen nach e2 gelangen, und er kann von e2 aus auch nicht wieder wegziehen (da er nach Sd2-f1 selbst auf der zweiten Reihe gefesselt ist); d.h. der zusätzliche Zug muss dann von einem anderen weißen Stein ausgeführt werden. Wenn der Sd2 zieht, kann der Lh5 in der Schlussphase nur zwei Züge ausführen.

Der Zug f4-f5 ist nur im 34. Zug möglich. Das haben wir bereits weiter oben festgestellt.

Der Zug h4-h5 kann im Partieverlauf nur nach Lh5-g4 geschehen; außerdem ist er nicht im 31. Zug möglich, weil dann auf h5 ein sL steht. Es ist zu beachten, dass der wB auf h5 geschlagen wird, falls der Zug h4-h5 vor dem 31. Zug der Partie stattfindet. Wenn der Zug h4-h5 andererseits nach dem 31. Zug gespielt wird, verbleibt der Bh5 auf dem Brett.

Abgesehen von den Manövern der wTT, bei denen wir im Detail noch etwas genauer hinsehen müssen, haben wir jetzt alle wesentlichen Nebenbedingungen und Abhängigkeiten für die verschiedenen weißen Zugmöglichkeiten in der Schlussphase der Partie geklärt. Die beiden Züge Dh3-h2 und g2-g3 sind jederzeit frei einsetzbar.

In der nachfolgenden Tabelle gehen wir nun systematisch alle möglichen Kombinationen der Zügezahlen der einzelnen Steine durch und zählen dabei die möglichen Verläufe der Schlussphase.

In den ersten acht Spalten der Tabelle werden jeweils die Zügezahlen der acht weißen Steine Lh5, Sd2, Bf4, Bh4, Dh3, Bg2, Ta2, Th1 aufgelistet (absteigend sortiert). In der neunten Spalte wird die Berechnung der Anzahl der Verläufe kurz angedeutet.

Lh5	Sd2	Bf4	Bh4	Dh3	Bg2	Ta2	Th1	Rechnung	Anzahl Verläufe
4	-	1	1	1	-	-	-	$3*2 + 2*1$	8
4	-	1	1	-	1	-	-	s.o.	8
4	-	1	1	-	-	1	-	s.o.	8
4	-	1	1	-	-	-	1	s.o.	8
4	-	1	-	1	1	-	-	$5*2$	10
4	-	1	-	1	-	1	-	s.o.	10
4	-	1	-	1	-	-	1	s.o.	10
4	-	1	-	-	1	1	-	s.o.	10
4	-	1	-	-	1	-	1	s.o.	10
4	-	1	-	-	-	2	-	-	5
4	-	1	-	-	-	1	1	s.o.	10
4	-	1	-	-	-	-	2	$3 * 5$	15
4	-	-	1	1	1	-	-	$(3*3 + 2*2) * 2$	26
4	-	-	1	1	-	1	-	s.o.	26
4	-	-	1	1	-	-	1	s.o.	26
4	-	-	1	-	1	1	-	s.o.	26
4	-	-	1	-	1	-	1	s.o.	26
4	-	-	1	-	-	2	-	$3*3 + 2*2$	13

4	-	-	1	-	-	1	1	s.o.	26
4	-	-	1	-	-	-	2	$3 * 13$	39
4	-	-	-	1	1	1	-	$5 * 6$	30
4	-	-	-	1	1	-	1	s.o.	30
4	-	-	-	1	-	2	-	$5 * 3$	15
4	-	-	-	1	-	1	1	s.o.	30
4	-	-	-	1	-	-	2	$3 * 15$	45
4	-	-	-	-	1	2	-	s.o.	15
4	-	-	-	-	1	1	1	s.o.	30
4	-	-	-	-	1	-	2	s.o.	45
4	-	-	-	-	-	3	-	$2 * 5$	10
4	-	-	-	-	-	1	2	$(2*3+1*1) * 5$	35
4	-	-	-	-	-	-	3	$4 * 5$	20
2	1	1	-	-	-	-	3	-	9
2	1	-	1	-	-	-	3	$1*5 + 4*4 + 3*3 + 1*2$	32
2	1	-	-	1	-	-	3	$9 * 5$	45
2	1	-	-	-	1	-	3	s.o.	45
2	1	-	-	-	-	4	-	-	9
2	1	-	-	-	-	1	3	s.o.	45
2	-	1	1	1	1	1	-	$(1*4 + 4*3 + 3*2 + 1*1) * 6$	138
2	-	1	1	1	1	-	1	s.o.	138
2	-	1	1	1	-	2	-	$23 * 3$	69
2	-	1	1	1	-	1	1	s.o.	138
2	-	1	1	1	-	-	2	$3 * 69$	207
2	-	1	1	-	1	2	-	s.o.	69
2	-	1	1	-	1	1	1	s.o.	138
2	-	1	1	-	1	-	2	s.o.	207
2	-	1	1	-	-	3	-	$2 * 23$	46
2	-	1	1	-	-	1	2	$7 * 23$	161
2	-	1	1	-	-	-	3	$4 * 23$	92
2	-	1	-	1	1	2	-	$9 * 3 * 4$	108
2	-	1	-	1	1	1	1	$108 * 2$	216
2	-	1	-	1	1	-	2	$3 * 108$	324
2	-	1	-	1	-	3	-	$2 * 9 * 4$	72
2	-	1	-	1	-	1	2	$7 * 9 * 4$	252
2	-	1	-	1	-	-	3	$4 * 9 * 4$	144
2	-	1	-	-	1	3	-	s.o.	72
2	-	1	-	-	1	1	2	s.o.	252
2	-	1	-	-	1	-	3	s.o.	144
2	-	1	-	-	-	4	-	$3 * 9$	27
2	-	1	-	-	-	3	1	-	9
2	-	1	-	-	-	2	2	$(2*3 + 1*1) * 9$	63
2	-	1	-	-	-	1	3	$4 * 9 * 4$	144
2	-	1	-	-	-	-	4	$8 * 9$	72
2	-	-	1	1	1	2	-	$32 * 3 * 4$	384
2	-	-	1	1	1	1	1	$32 * 4 * 3 * 2$	768
2	-	-	1	1	1	-	2	$3 * 384$	1.152
2	-	-	1	1	-	3	-	$2 * 32 * 4$	256
2	-	-	1	1	-	1	2	$7 * 32 * 4$	896
2	-	-	1	1	-	-	3	$4 * 32 * 4$	512

2	-	-	1	-	1	3	-	s.o.	256
2	-	-	1	-	1	1	2	s.o.	896
2	-	-	1	-	1	-	3	s.o.	512
2	-	-	1	-	-	4	-	$3 * 32$	96
2	-	-	1	-	-	3	1	-	32
2	-	-	1	-	-	2	2	$7 * 32$	224
2	-	-	1	-	-	1	3	s.o.	512
2	-	-	1	-	-	-	4	$8 * 32$	256
2	-	-	-	1	1	3	-	$2 * 9 * 4 * 5$	360
2	-	-	-	1	1	1	2	$7 * 9 * 4 * 5$	1.260
2	-	-	-	1	1	-	3	$4 * 9 * 4 * 5$	720
2	-	-	-	1	-	4	-	$3 * 9 * 5$	135
2	-	-	-	1	-	3	1	$9 * 5$	45
2	-	-	-	1	-	2	2	$7 * 9 * 5$	315
2	-	-	-	1	-	1	3	s.o.	720
2	-	-	-	1	-	-	4	$8 * 9 * 5$	360
2	-	-	-	-	1	4	-	s.o.	135
2	-	-	-	-	1	3	1	s.o.	45
2	-	-	-	-	1	2	2	s.o.	315
2	-	-	-	-	1	1	3	s.o.	720
2	-	-	-	-	1	-	4	s.o.	360
2	-	-	-	-	-	5	-	$5 * 9$	45
2	-	-	-	-	-	4	1	$2 * 9$	18
2	-	-	-	-	-	3	2	$(2*4 + 1 + 3 + 1) * 9$	117
2	-	-	-	-	-	2	3	$(4 + 7) * 9$	99
2	-	-	-	-	-	1	4	$(6*5 + 1*4 + 2*1) * 9$	324
2	-	-	-	-	-	-	5	$14 * 9$	126

Insgesamt gibt es damit 17.083 verschiedene Verläufe der Schlussphase. In Kombination mit den 184.320 Varianten der Anfangsphase der Partie ergeben sich 3.148.738.560 verschiedene optimale Lösungen (kurz: ca. 3 Milliarden). Im Vergleich zu den 1.133.280 Lösungen der ursprünglichen Aufgabenstellung (vgl. Anhang A) bedeutet dies eine Steigerung um den Faktor 2.778.

Wir wollen nun noch die Anzahl der verschiedenen Schlussstellungen der optimalen Lösungen ohne den Zug wLd8-a5 bestimmen.

Dazu betrachten wir zunächst den Sonderfall mit wSf1 in der Schlussstellung. In diesem Fall ist in der Schlussphase der Partie der Zug Sd2-f1 vorgekommen. Wir wissen bereits, dass hierfür ein wT nach e2 wandern muss (und danach auf e2 verbleibt). Entweder gelangt der Ta2 in genau vier Zügen nach e2 oder der Th1 in genau drei Zügen. Wenn der Ta2 in vier Zügen nach e2 kommt, dann sind alle weißen Züge verbraucht, und die Schlussstellung ist eindeutig festgelegt. Wenn der Th1 in drei Zügen nach e2 wandert, so ist noch ein Zug übrig, der von einem der vier Steine Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 ausgeführt werden muss. Hierfür gibt es vier Züge zur Auswahl, wobei sich im Fall des Zuges h4-h4 noch zwei verschiedene Schlussstellungen ergeben können – abhängig davon, ob der Zug h4-h5 im Partieverlauf vor oder nach sLe8-h5 stattfindet. Mit der Wanderung des Th1 nach e2 erhalten wir also fünf verschiedene Schlussstellungen. Da wir im Fall Ta1 → e2 in der Schlussstellung auf h1 einen wT sehen und im Fall Th1 → e2 nicht, überschneiden sich die beiden Fälle nicht. Es gibt damit genau sechs verschiedene Schlussstellungen mit wSf1.

Es bleibt der Fall zu betrachten, dass am Ende auf f1 kein wS steht. Dann kommt in der Schlussphase der Partie nicht der Zug Sd2-f1 vor. Die sieben Züge der Schlussphase werden von den sieben Steinen Lh5, Ta2, Th1, Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 ausgeführt.

Der wL zieht entweder genau zweimal oder genau viermal. Er wird stets auf dem Feld f5 geschlagen und befindet sich damit in der Schlusstellung nicht mehr auf dem Brett. Man kann der Schlusstellung nicht unmittelbar ansehen, ob der wL zweimal oder viermal gezogen hat. Für die vier Steine Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 ist anhand der Schlusstellung jeweils noch zu erkennen, ob sie in der Schlussphase der Partie gezogen haben oder nicht: Bf4 steht entweder auf f4 oder auf f5, Dh3 steht entweder auf h3 oder h2, Bg2 steht entweder auf g3 oder fehlt, und Bh4 kann auf h4 oder auf h5 stehen oder fehlen – im letzteren Fall wurde er auf h5 geschlagen.

Die Gesamtzahl der Züge, die von den vier Steinen Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 ausgeführt wurden, liegt bei gegebener Schlusstellung also fest – und damit auch die Gesamtzahl der Züge, die von den drei Steinen TTL gespielt wurden. Davon entfallen entweder zwei oder vier Züge auf den wL, so dass es für die Gesamtzahl der Turmzüge in der Regel genau zwei Möglichkeiten gibt, die um genau zwei Züge 1auseinanderliegen.

Durch Pendelmanöver des Läufers und der Türme, aber auch durch Rollentausch der Türme ist es in vielen Fällen möglich, die gleiche Schlusstellung auf verschiedenen Wegen zu erreichen. Für die weitere Betrachtung ist es nützlich, sich die möglichen Standfelder der beiden wTT in der Schlusstellung und deren Kombinationen zu vergegenwärtigen. Wir wissen bereits, dass die wTT sich stets im Bereich der acht Felder a1, b1, e1, h1, a2, b2, e2, b6 aufhalten. Wir wissen auch, in welcher Zügezahl jeder der beiden Türme jedes dieser acht Felder erreichen kann:

	<b>a1</b>	<b>b1</b>	<b>e1</b>	<b>h1</b>	<b>a2</b>	<b>b2</b>	<b>e2</b>	<b>b6</b>
<b>Ta2</b>	4	2, 4, 5	3, 5	3	0, 5	1	4	3, 5
<b>Th1</b>	3, 5	1, 3, 4, 5	2, 4, 5	0, 2, 4, 5	4	-	3, 5	2, 4, 5

Wir stellen nun zusammen, welche Kombinationen an Feldern für die beiden Türme sich hieraus in der Schlusstellung erzielen lassen. Die beiden Türme ziehen zusammen höchstens fünfmal. In der nachstehenden Tabelle unterscheiden wir noch zwischen den beiden Türmen, d.h. wir verfolgen getrennt die Wege des Ta2 und des Th1. Die Zügezahlen werden in der Form  $m+n$  angegeben, wobei  $m$  die Anzahl der Züge des Ta2 bezeichnet und  $n$  die Anzahl der Züge des Th1. Bei der Befüllung der Tabelle ist zu beachten, dass die beiden Türme am Ende nicht auf dem gleichen Feld stehen können. Wenn der Ta2 nach h1 wandert, muss der Th1 nach b6 gehen. Die Kombination aus Ta1  $\rightarrow$  e1 und Th1  $\rightarrow$  b1 ist nicht möglich. Alle anderen Kombinationen mit maximal fünf Zügen sind darstellbar.

	Th1 →	a1	b1	e1	h1	a2	b2	e2	b6
<b>Ta2 →</b>	Züge	3, 5	1, 3, 4, 5	2, 4, 5	0, 2, 4, 5	4	-	3, 5	2, 4, 5
<b>a1</b>	4	-	4+1	-	4+0	-	-	-	-
<b>b1</b>	2, 4, 5	2+3	-	2+2	2+0 2+2 4+0 5+0	-	-	2+3	2+2
<b>e1</b>	3, 5	-	-	-	3+0 3+2 5+0	-	-	-	3+2
<b>h1</b>	3	-	-	-	-	-	-	-	3+2
<b>a2</b>	0, 5	0+3 0+5	0+1 0+3 0+4 0+5	0+2 0+4 0+5	0+0 0+2 0+4 0+5 5+0	-	-	0+3 0+5	0+2 0+4 0+5
<b>b2</b>	1	1+3	1+1 1+3 1+4	1+2 1+4	1+0 1+2 1+4	1+4	-	1+3	1+2 1+4
<b>e2</b>	4	-	4+1	-	4+0	-	-	-	-
<b>b6</b>	3, 5	-	3+1	3+2	3+0 3+2 5+0	-	-	-	-

In Bezug auf die Zählung der Schlussstellungen ist es ohne Bedeutung, welcher der beiden wTT auf welchem Feld landet. Wir wollen lediglich wissen, welche Kombinationen von zwei Feldern überhaupt für die beiden wTT in Frage kommen und in wie vielen Zügen die beiden wTT diese Kombination von Feldern insgesamt erreichen. Deshalb spiegeln wir im nächsten Schritt den unteren linken Teil der Tabelle an der Hauptdiagonalen und berücksichtigen ihn fortan oben rechts; und außerdem notieren wir nur noch die Gesamtzahl der Züge der beiden Türme.

	b1	e1	h1	a2	b2	e2	b6
<b>a1</b>	5	-	4	3, 5	4	-	-
<b>b1</b>		4	2, 4, 5	1, 3, 4, 5	2, 4, 5	5	4
<b>e1</b>			3, 5	2, 4, 5	3, 5	-	5
<b>h1</b>				0, 2, 4, 5	1, 3, 5	4	3, 5
<b>a2</b>					5	3, 5	2, 4, 5
<b>b2</b>						4	3, 5
<b>e2</b>							-

Jetzt können wir die Stellungen mit wSd2 abzählen. Wir unterscheiden die Fälle nach der Gesamtzahl der Züge der vier Steine Bf4, Bh4, Dh3, Bg2.

- Wenn Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 zusammen überhaupt nicht ziehen, dann ist die Position dieser vier Steine in der Schlussstellung eindeutig festgelegt, und es entfallen sieben Züge auf die drei Figuren TTL. Die beiden Türme ziehen damit zusammen entweder dreimal oder fünfmal. In der

obigen Tabelle finden wir 17 Kombinationen von zwei Feldern, die die beiden Türme in drei oder fünf Zügen erreichen können. In diesem Fall erhalten wir damit 17 Schlussstellungen.

- Wenn Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 zusammen genau einen Zug ausführen, dann gibt es dafür vier Möglichkeiten. Im Fall des Zuges h4-h5 gibt es dabei noch zwei Möglichkeiten für die Position dieses Bauern in der Schlussstellung (abhängig davon, ob h4-h5 vor oder nach sLe8-h5 erfolgt). Also gibt es für die Positionen der weißen Steine ohne die Türme genau fünf Möglichkeiten. Die beiden Türme ziehen zusammen entweder zweimal oder viermal, dafür gibt es zwölf Kombinationen der Felder in der Schlussstellung. In diesem Fall erhalten wir damit  $5 * 12 = 60$  Schlussstellungen.
- Wenn Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 zusammen genau zwei Züge ausführen, dann gibt es dafür sechs Kombinationen. In den drei Fällen unter Beteiligung des Zuges h4-h5 gibt es jeweils noch zwei Möglichkeiten für die Position dieses Bauern in der Schlussstellung. Für die Positionen der weißen Steine ohne die Türme erhalten wir neun Möglichkeiten. Die beiden Türme ziehen zusammen entweder einmal oder dreimal, das führt auf acht Kombinationen der Felder der beiden Türme. Wir erhalten  $9 * 8 = 72$  Schlussstellungen.
- Wenn Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 zusammen genau dreimal ziehen, dann gibt es dafür vier Kombinationen. In drei Fällen ist der Zug h4-h5 beteiligt, und dann gibt es wieder zwei Möglichkeiten für die Position dieses Bauern. Für die Positionen der weißen Steine ohne die Türme ergeben sich sieben Möglichkeiten. Die beiden Türme ziehen zusammen entweder überhaupt nicht oder zweimal, das führt auf fünf Kombinationen der Felder. Wir erhalten  $7 * 5 = 35$  Schlussstellungen.
- Wenn Bf4, Bh4, Dh3, Bg2 mehr als dreimal ziehen, dann müssen alle vier Züge dabei sein. Wegen des Zuges h4-h5 gibt es zwei Möglichkeiten für die Positionen der weißen Steine ohne die Türme. Die Türme ziehen zusammen genau einmal, dafür gibt es zwei Kombinationen. Wir erhalten  $2 * 2 = 4$  Schlussstellungen.

Indem wir nun alle untersuchten Fälle zusammenfassen, erhalten wir  $6 + 17 + 60 + 72 + 35 + 4 = 194$  verschiedene Schlussstellungen. Im Durchschnitt wird jede dieser 194 Schlussstellungen auf ca. 16 Millionen Arten (Varianten) erreicht.

### **9. Anhang C: Verallgemeinerung der Aufgabenstellung auf alle Partiefänge von CarCar**

Im vorangegangenen Anhang B haben wir die Aufgabenstellung des Wettbewerbs unter der zusätzlichen Voraussetzung untersucht, dass der letzte Zug der Partie *CarCar* für die Lösung nicht zur Verfügung steht. Wenn wir am Ende der Partie *CarCar* nun vor 91. Ld8-a5 schrittweise noch weitere Züge entfernen, ändert sich an der Lösung zunächst nichts – denn die 16 Einzelzüge von 83. d5-d6 bis 90... e3-e2 spielen für die Lösung der (modifizierten) Aufgabenstellung keine Rolle. Wenn wir allerdings darüber hinaus auch noch den Zug 82... Tb2-c2 weglassen, so gibt es keine Lösung mehr, die 60 Felder besucht.

Ohne den Zug sTb2-c2 können wir jedoch immer noch auf die Idee kommen, ersatzweise nach Lösungen zu suchen, die immerhin 59 Felder des Schachbretts besuchen. Indem wir diesen Ansatz weiter verallgemeinern, gelangen wir schließlich zu insgesamt 182 verschiedenen Aufgabenstellungen, die nachfolgend formuliert werden.

Es sei  $m$  ein ganzzahliges Vielfaches von 0,5 mit  $0,0 \leq m \leq 90,5$ . Mit  $CarCar[m]$  bezeichnen wir die Schachpartie, die aus den ersten  $m$  Zügen der Partie  $CarCar$  besteht. Die Anzahl der Felder, die im Verlauf von  $CarCar[m]$  besucht werden, kürzen wir mit  $F[m]$  ab. Die Aufgabenstellung  $A[m]$  lautet nun:

- Grundlage ist die Partie  $CarCar[m]$ .
- Gefordert ist eine Partie  $P$ , welche wie  $CarCar[m]$  genau  $F[m]$  Felder **besucht** – also betritt oder überschreitet. Jeder Zug dieser Partie  $P$  muss in  $CarCar[m]$  **vorkommen**.
- Die kürzeste derartige Partie gewinnt. Bei gleicher Länge bekommt den Vorrang, wer zuerst  $F[m]-1$  Felder besucht. Dieses Prinzip wird nötigenfalls mit  $F[m]-2$ ,  $F[m]-3$ , ... Feldern fortgesetzt.

$A[90,5]$  ist die ursprüngliche Aufgabenstellung des Wettbewerbs. Für die Aufgabe  $A[90,0]$  haben wir im Anhang B die optimalen Lösungen bestimmt, und gemäß der einleitenden Bemerkung des vorliegenden Anhangs C handelt es sich dabei gleichzeitig auch um die optimalen Lösungen für  $A[m]$  mit  $83,0 \leq m \leq 89,5$ .

Wir wollen nun für alle  $m$  mit  $0,0 \leq m \leq 90,5$  eine optimale Lösung der Aufgabe  $A[m]$  notieren und außerdem die Gesamtzahl der optimalen Lösungen und die Anzahl der daraus resultierenden Schlussstellungen bestimmen. Wir gehen die 182 Werte von  $m$  dabei in aufsteigender Anordnung der Reihe nach durch. Beim Übergang von der Vorgänger-Aufgabe  $A[m-0,5]$  zur Aufgabe  $A[m]$  vergrößert sich dabei in der Regel der Vorrat an verfügbaren Zügen um genau einen Zug. Im Falle der 20 Zugwiederholungen in der Partie  $CarCar$  (z.B.  $m = 28,0$ ) kommt überhaupt kein neuer verfügbarer Zug hinzu – in diesen 20 Fällen bleibt sowohl die Aufgabe als auch die Lösung unverändert.

Abgesehen von den 20 Zugwiederholungen gibt es mit dem neu hinzukommenden Zug grundsätzlich zwei wesentliche Situationen:

- **Durch den  $m$ -ten Zug wird im Verlauf der Partie  $CarCar$  ein neues Feld erstmalig besucht.**  
In diesem Fall muss das neue Feld dann auch in der Lösung der Aufgabenstellung  $A[m]$  neu besucht werden, und dafür steht nur der neue ( $m$ -te) Zug aus  $CarCar$  zur Verfügung. Der neue Zug muss also in die Lösung integriert werden. Im Normalfall nimmt die Länge (Zügelzahl) der optimalen Lösung damit zu. In Ausnahmefällen kann es allerdings auch vorkommen, dass durch den neuen Zug die Möglichkeit geschaffen wird, an anderer Stelle ein Manöver abzukürzen. Unter diesen Umständen ist es dann möglich, dass die Lösung von  $A[m]$  zwar mehr Felder besucht, aber trotzdem weniger Züge benötigt als die Lösung von  $A[m-0,5]$ .
- **Der  $m$ -te Zug von  $CarCar$  besucht kein neues Feld.**  
In diesem Fall ändert sich an der zu bewältigenden Zielsetzung der Aufgabe  $A[m]$  im Verhältnis zu  $A[m-0,5]$  nichts – es müssen die gleichen Felder besucht werden. Jede Lösung von  $A[m-0,5]$  löst damit auch die Aufgabe  $A[m]$ . Allerdings entstehen durch den neuen ( $m$ -ten) Zug zusätzliche Ressourcen für die Konstruktion der Lösung. Es kann deshalb vorkommen, dass die optimale Lösung von  $A[m]$  mit weniger Feldern auskommt als die Lösung von  $A[m-0,5]$ . Wie wir bereits gesehen haben, ist dies z.B. für  $m = 90,5$  tatsächlich der Fall. Wesentlich häufiger spielt allerdings der neu hinzugekommene Zug einfach keine Rolle für die Lösung; die optimalen Lösungen bleiben dann einfach unverändert. Und es gibt schließlich auch noch eine Zwischenvariante: Alle optimalen Lösungen von  $A[m-0,5]$  sind auch optimale Lösungen von  $A[m]$ , aber es kommen darüber hinaus weitere optimale Lösungen hinzu, weil der neue Zug weitere Verzweigungen im Partieverlauf ermöglicht.

Wie wir sehen werden, dominiert in der Anfangsphase der Partie *CarCar* (kleine Werte des Parameters  $m$ ) der Fall, dass ein neues Feld besucht wird, während in der Schlussphase (hohe Werte für  $m$ ) überwiegend der entgegengesetzte Fall vorliegt. Dies entspricht natürlich auch der naiven Erwartung.

Jetzt betrachten wir nacheinander die Aufgaben  $A[m]$  für  $m = 0,0, 0,5, 1,0, 1,5, \dots$

### **A[0,0]**

In den ersten 0,0 Zügen der Partie *CarCar* werden 0 Felder besucht, d.h. es gilt  $F[0,0] = 0$ . Die Aufgabe, 0 Felder zu besuchen, lässt sich in 0,0 Zügen erledigen. Die optimale Lösung besteht deshalb aus 0,0 Zügen (die „leere Partie“). Der Partieverlauf ist eindeutig, ebenso die Schlussstellung (nämlich die Partieanfangsstellung).

### **A[0,5]**

Im ersten Zug von Weiß werden in der Partie *CarCar* die beiden Felder e3 und e4 besucht. Wir erhalten  $F[0,5] = 2$ . In der optimalen Lösung muss der Zug e2-e4 vorkommen, und dieser Zug reicht dann auch aus. Die optimale Lösung umfasst 0,5 Züge, sie lautet 1. e4. Der Verlauf und die Schlussstellung sind eindeutig.

### **A[1,0]**

Der erste Zug von Schwarz in der Partie *CarCar* besucht das Feld e6, es gilt  $F[1,0] = 3$ . Der Zug e7-e6 wird benötigt. Als optimale Lösung erhalten wir 1. e4 e6, sie umfasst 1,0 Züge, und der Verlauf und die Schlussstellung sind eindeutig.

### **A[1,5]**

Der zweite weiße Zug besucht die Felder d3 und d4; es gilt  $F[1,5] = 5$ . Der Zug d2-d4 wird benötigt. Als optimale Lösung erhalten wir 1. e4 e6 2. d4, sie umfasst 1,5 Züge. Allerdings ist der Verlauf nun erstmals nicht mehr eindeutig: Da beide weißen Züge jeweils zwei Felder besuchen, sind sie untereinander gleichwertig und können vertauscht werden. Es gibt zwei optimale Lösungen, wobei die Schlussstellung aber trotzdem eindeutig ist.

### **A[2,0]**

Der zweite schwarze Zug besucht die Felder d6 und d5; es gilt  $F[2,0] = 7$ . Der Zug d7-d5 wird benötigt. Da er mehr Felder besucht als der Zug e7-e6, muss in einer optimalen Lösung der Zug d7-d5 vor e7-e6 gespielt werden, d.h. gegenüber der Partie *CarCar* ist die Reihenfolge der beiden schwarzen Züge vertauscht. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 e6 (2,0 Züge). Die beiden weißen Züge sind wieder vertauschbar, d.h. es gibt zwei optimale Lösungen mit eindeutiger Schlussstellung.

### **A[2,5]**

Der dritte weiße Zug besucht das Feld c3; wir erhalten  $F[2,5] = 8$ . Der Zug wSb1-c3 wird benötigt. Da er weniger Felder besucht als die beiden weißen Bauernzüge, muss er in der Reihenfolge am

Partieende angefügt werden. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 e6 3. Sc3 (2,5 Züge). Die beiden ersten weißen Züge sind vertauschbar, es gibt zwei optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[3,0]**

Der dritte schwarze Zug besucht erstmals die Felder e7, c5 und b4. Es ergibt sich  $F[3,0] = 11$ . Mit dem Feld d6 wird erstmalig im Verlauf von *CarCar* ein Feld zum zweiten Mal besucht. Für unsere Lösung ist aber trotzdem keiner der beiden Züge d7-d5 und sLf8-b4 verzichtbar, weil die Besuche auf den Feldern d5, e7, c5 und b4 benötigt werden. Der Zug sLf8-b4 muss im Partieverlauf natürlich nach e7-e6 geschehen. Da der Bauernzug d7-d5 im Rückwärtsspiel weniger Felder verliert als Lf8-b4, muss er in einer optimalen Lösung nach dem Läuferzug geschehen. Wir erhalten deshalb 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 (3,0 Züge). Der Zug 3. Sb1-c3 kommt gerade rechtzeitig, um das Schach zu parieren. Die beiden ersten weißen Züge sind vertauschbar, es gibt zwei optimale Lösungen bei eindeutiger Schlussstellung.

### **A[3,5]**

Der vierte weiße Zug besucht erstmals das Feld e5, und es ergibt sich  $F[3,5] = 12$ . Natürlich muss der Bauernzug e4-e5 nach e2-e4 gespielt werden – aber auch nach d2-d4, weil er nur ein Feld verliert. Aus Sicht der besuchten Felder wäre e4-e5 eigentlich in der Reihenfolge mit wSb1-c3 vertauschbar, aber der Springerzug muss das Schach des sLb4 abblocken. Deshalb ist die Reihenfolge zwischen dem 3. und 4. weißen Zug eindeutig. Wir erhalten 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 (3,5 Züge). Die beiden ersten weißen Züge sind vertauschbar, es gibt zwei optimale Lösungen bei eindeutiger Schlussstellung.

### **A[4,0]**

Der vierte schwarze Zug besucht erstmals das Feld c6; es gilt  $F[4,0] = 13$ . Das Feld c5 wird zum zweiten Mal besucht. Trotzdem werden beide Züge sLf8-b4 und c7-c5 benötigt. Der Zug c7-c5 muss nach sLf8-b4 gespielt werden, er verliert ebenso wie d7-d5 nur ein Feld. Die beiden schwarzen Bauernzüge c7-c5 und d7-d5 sind damit in der Reihenfolge vertauschbar. Wir erhalten 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 c5 (4,0 Züge). Die beiden ersten weißen Züge sind vertauschbar, ebenso die beiden letzten schwarzen Züge. Es gibt vier optimale Lösungen bei eindeutiger Schlussstellung.

### **A[4,5]**

Der fünfte weiße Zug besucht erstmals das Feld a3; es gilt  $F[4,5] = 14$ . Die weißen Bauernzüge e4-e5 und a2-a3 sind in der Reihenfolge vertauschbar. Wir erhalten 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 c5 5. a3 (4,5 Züge). Die beiden ersten weißen Züge sind vertauschbar, ebenso die beiden letzten schwarzen Züge und die beiden letzten weißen Züge. Es gibt acht optimale Lösungen mit eindeutiger Schlussstellung.

### **A[5,0]**

Im fünften schwarzen Zug erleben wir erstmals den Fall, dass kein neues Feld besucht wird. Der Zug sLb4-c3 wird für die optimale Lösung nicht benötigt. Im Vergleich zur Aufgabe A[4,5] ändert sich an den optimalen Lösungen nichts.

### **A[5,5]**

Auch der Zug b2xc3 wird für die Lösung der Aufgabenstellung nicht benötigt. Es wird erneut kein neues Feld besucht, und die optimalen Lösungen sind immer noch dieselben wie in der Aufgabe A[4,5].

### **A[6,0]**

Da auch der Zug sSg8-e7 kein neues Feld besucht, ändert sich zum dritten Mal in Folge nichts an den optimalen Lösungen.

### **A[6,5]**

Der Zug wSg1-f3 besucht erstmalig das Feld f3, und wir erhalten  $F[6,5] = 15$ . Für jede Lösung benötigen wir die fünf weißen Züge Sg1-f3, a2-a3, d2-d4 und e2-e4-e5 sowie die vier schwarzen Züge Lf8-b4, c7-c5, d7-d5 und e7-e6. Für den Besuch auf dem Feld c3 wäre es nun naheliegend, den Zug sLb4-c3 zu nutzen und dadurch wSb1-c3 einzusparen. Dies führt allerdings nicht zum Ziel, da Weiß dann das potenzielle Schach durch sLf8-b4 nur dadurch abwehren könnte, dass er den d-Bauern auf d2 stehen lässt – doch dort wäre der wB dann gefesselt und könnte den Zug d2-d4 nicht mehr ausführen. Also benötigt die Lösung mehr als 5,0 Züge. Der Besuch auf dem Feld c3 durch sLb4-c3 wäre jetzt denkbar, indem Weiß zunächst den sL durch Sb1xc3 oder b2xc3 schlägt und erst danach d2-d4 zieht; doch mit diesem Manöver würde der letzte weiße Zug zwei Felder verlieren. Besser ist es, nur ein Feld zu verlieren (durch Sg1-f3, a2-a3 oder e4-e5), und dazu ist es erforderlich, dass das Feld c3 erstmals durch wSb1-c3 besucht wird. Die sechs weißen Züge stehen damit fest, und Schwarz benötigt im 5. Zug einen Freizug als Abwartezug – und dafür kommt nur Sg8-e7 in Frage. Damit erhalten wir 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 c5 5. a3 Se7 6. Sf3 (5,5 Züge). Die ersten beiden weißen Züge sind vertauschbar, ebenso die Züge Nr. 3 und 4 von Schwarz und die letzten drei Züge von Weiß. Es gibt 24 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[7,0]**

Der siebte schwarze Zug besucht kein neues Feld. Der Zug sSb8-c6 kann aber nun als Alternative zu Sg8-e7 (als Freizug) oder zu c7-c5 (für den Besuch auf c6) genutzt werden. Zu den bereits bekannten 24 optimalen Lösungen kommen damit nun weitere hinzu. Die ersten beiden schwarzen Züge stehen weiterhin fest. Im 3. und 4. Zug müssen die beiden Felder d5 und c6 besucht werden, dazu ist der Zug d7-d5 nötig sowie einer der beiden Züge c7-c5 oder Sb8-c6. Im 5. Zug brauchen wir schließlich einen Freizug – im Fall von 3./4.... Sb8-c6 kann das nur Sg8-e7 sein, während es im Fall von 3./4.... c7-c5 die beiden Möglichkeiten Sb8-c6 und Sg8-e7 gibt. Für die weiße Zugfolge haben wir 12 Möglichkeiten (mit eindeutiger Schlussstellung), für die schwarze  $2 * (1 + 2) = 6$  Möglichkeiten (drei Schlussstellungen). Insgesamt erhalten wir 72 optimale Lösungen, und erstmals gibt es auch mehrere mögliche Schlussstellungen, nämlich drei. Die letzte eindeutige Stellung wird im Partieverlauf mit dem 3. Zug von Weiß erreicht.

### **A[7,5]**

Der achte weiße Zug besucht mit e2 ein neues Feld, wir erhalten  $F[7,5] = 16$ . Der Zug wLf1-d3 wird benötigt, aber auch der Zug d2-d4 ist immer noch erforderlich (für das Feld d4). Im Partieverlauf

muss d2-d4 vor Lf1-d3 geschehen, d.h. d2-d4 verliert zwei Felder und Lf1-d3 nur eines. Wegen der Schachkonstellation auf der Diagonalen b4-e1 ist es wieder nicht möglich, dass Schwarz im Partieverlauf zuerst das Feld c3 besucht. Die optimale Lösung benötigt deshalb 6,5 Züge, und Schwarz braucht zwei Freizüge als Abwartezüge. Das können nur die Freizüge Sb8-c6 und Sg8-e7 sein, d.h. für den Besuch des Feldes c6 benötigen wir den Bauernzug c7-c5. Wir erhalten 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 c5 5. a3 Se7 6. Sf3 Sbc6 7. Ld3 (6,5 Züge). Bei Weiß sind die ersten beiden Züge vertauschbar, und außerdem ist die Reihenfolge der letzten vier Züge frei wählbar. Bei Schwarz sind die Züge Nr. 3 und 4 vertauschbar sowie die Züge Nr. 5 und 6. Insgesamt erhalten wir 192 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[8,0]**

Der achte schwarze Zug besucht das Feld d7 erstmalig, und wir erhalten  $F[8,0] = 17$ . Der Zug sLc8-d7 wird benötigt – dafür muss Schwarz den ersten seiner beiden bisherigen Freizüge hergeben. Die Lösung kommt immer noch mit 6,5 Zügen aus, und an den weißen Manövern ändert sich nichts. Schwarz muss im 3.-5. Zug jeweils ein neues Feld besuchen, und zwar die Felder d5, d7 und c6. Für die Felder d5 und d7 werden die beiden Züge d7-d5 und Lc8-d7 benötigt, und diese beiden Züge müssen in der Partie auch in dieser Reihenfolge auftreten. Für das Feld c6 hat Schwarz wieder die Wahl zwischen c7-c5 und Sb8-c6. Hinzu kommt im 6. Zug ein Freizug: Falls zuvor Sb8-c6 geschehen ist, so muss der Freizug Sg8-e7 sein, während im Fall von c7-c5 als Freizug die beiden Möglichkeiten Sg8-e7 und Sb8-c6 zur Verfügung stehen. Für die weißen Manöver haben wir 48 Möglichkeiten und für die schwarzen  $3 * 3 = 9$ . Wir erhalten als optimale Partie 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. e5 c5 5. a3 Ld7 6. Sf3 Se7 7. Ld3 (6,5 Züge) mit 432 Varianten und drei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Stellung wird mit dem 3. Zug von Weiß erreicht.

### **A[8,5]**

Der neunte weiße Zug besucht die beiden neuen Felder f1 und g1, und wir erhalten  $F[8,5] = 19$ . Der Zug wO-O wird benötigt, aber dafür ergibt sich im Gegenzug erstmals eine Möglichkeit, den Springerzug wSb1-c3 wegzulassen und das Feld c3 statt dessen durch sLb4-c3 zu besuchen. Die Partie kommt damit immer noch mit 6,5 Zügen aus. Da sLf8-b4 erst nach wO-O geschehen darf, muss die Rochade schnellstmöglich vorbereitet und gleichzeitig der schwarze Läuferzug zurückgehalten werden. Der Bauernzug c7-c5 ist nicht möglich, weil der Bc5 den sL verstellen würde; das Feld c6 muss deshalb durch Sb8-c6 besucht werden. Als optimale Lösung ergibt sich 1. e4 d5 2. d4 e6 3. Sf3 Sc6 4. Ld3 Ld7 5. O-O Lb4 6. e5 Lc3 7. a3 (6,5 Züge). Bei Weiß sind die ersten beiden Züge vertauschbar, ebenso die Züge Nr. 3 und 4 und auch die Züge Nr. 6 und 7. Bei Schwarz ist die Reihenfolge der drei Züge Nr. 2-4 frei wählbar. Es gibt 48 Varianten, die alle auf eine einheitliche Schlussstellung führen.

### **A[9,0]**

Der neunte schwarze Zug besucht das Feld c7, und wir erhalten  $F[9,0] = 20$ . Für den Besuch auf c7 wird der Zug sDd8-c7 benötigt und dafür zur Vorbereitung c7-c5. Es ist klar, dass eine Verlängerung der Partie auf 7,0 Züge unvermeidlich ist – aber selbst dies reicht noch nicht aus, weil dazu der Läuferzug sLf8-b4 nach der weißen Rochade erfolgen müsste, doch wO-O ist frühestens im 5. Zug möglich, und nach sLf8-b4 müsste noch Lb4-c3, c7-c5 und Dd8-c7 erfolgen – und dann wären wir schon im achten Zug von Schwarz. Also benötigen wir für die Lösung sogar mindestens 7,5 Züge. Um

nun wenigstens im siebten schwarzen Zug einen Freizug zu ermöglichen, müssen wir die Verantwortung für den Besuch auf dem Feld c3 an Weiß zurückgeben – dieses Feld wird jetzt wieder durch wSb1-c3 erstmalig erreicht. Weiß kann in den letzten beiden Zügen die Züge a2-a3 und e4-e5 zurücknehmen, die jeweils nur ein Feld verlieren. Die Rücknahme von Sb1-c3 (im Partieverlauf nach wO-O) scheidet jedoch aus, weil Schwarz nach Lf8-b4 noch c7-c5 und Dd8-c7 spielen muss und außerdem im 7. Zug einen Freizug benötigt, so dass Lf8-b4 spätestens im 4. Zug geschehen muss – und damit vor der weißen Rochade. Der wS wird auf c3 als Schachschutz benötigt. Wir erhalten nun 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. Sf3 c5 5. Ld3 Ld7 6. O-O Dc7 7. e5 Lxc3 8. a3 (7,5 Züge). Anstelle des Freizugs 7... Lxc3 sind auch Sb8-c6 und Sg8-e7 möglich. Bei Weiß sind die ersten beiden Züge vertauschbar, außerdem die Züge Nr. 4 und 5 sowie die Züge Nr. 7 und 8. Schwarz muss in den Zügen Nr. 3-6 die vier Züge d7-d5, c7-c5, Lc8-d7 und Dd8-c7 unterbringen, wobei d7-d5 vor Lc8-d7 geschieht und c7-c5 vor Dd8-c7; dafür gibt es sechs Möglichkeiten. Insgesamt erhalten wir 144 optimale Lösungen mit drei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 6. Zug von Schwarz erreicht.

### A[9,5]

Der zehnte weiße Zug besucht das Feld e1, und wir erhalten  $F[9,5] = 21$ . Der Zug wTf1-e1 wird benötigt. Die einzige Chance, dies mit weniger als 8,5 Zügen umzusetzen, bestünde nun darin, Weiß wieder von der Aufgabe zu entbinden, das Feld c3 zu besuchen – d.h. wir müssten auf wSb1-c3 verzichten und dafür sLb4-c3 in die Partie einbauen. Weil dann sLf8-b4 erst nach der weißen Rochade möglich wäre und Schwarz danach noch Lb4-c3, c7-c5 und Dd8-c7 ziehen müsste, bräuchten wir für die Lösung 8,0 Züge – und die letzten vier schwarzen Züge wären Lf8-b4-c3, c7-c5 und Dd8-c7. In den ersten vier Zügen von Schwarz müsste e7-e6, d7-d5 und Lc8-d7 geschehen – und zusätzlich bräuchte Schwarz in den ersten vier Zügen noch einen Abwartezug. Doch für diesen Abwartezug kämen nur Sb8-c6 oder Sg8-e7 in Frage, die dann entweder c7-c5 oder Lf8-b4 unmöglich machen. Diese Überlegung zeigt, dass wir für die Lösung 8,5 Züge benötigen. In den letzten beiden Zügen von Schwarz können wir jeweils Freizüge unterbringen, und deshalb ist es wieder erforderlich, dass Weiß das Feld c3 besucht. Wir erhalten 1. e4 e6 2. d4 Lb4+ 3. Sc3 d5 4. Sf3 c5 5. Ld3 Ld7 6. O-O Dc7 7. e5 Lxc3 8. a3 Se7 9. Te1 (8,5 Züge). Bei Weiß sind wieder die Züge Nr. 1+2 und die Züge Nr. 4+5 jeweils vertauschbar; außerdem können die letzten drei Züge in beliebiger Reihenfolge geschehen (sechs Möglichkeiten). Bei Schwarz haben wir wie oben sechs Varianten für die vier Züge Nr. 3-6; außerdem muss Schwarz in den letzten beiden Zügen zwei Freizüge spielen, wofür die drei Kandidaten Lb4xc3, Sg8-e7 und Sb8-c6 zur Verfügung stehen – dafür gibt es sechs Möglichkeiten. Insgesamt gibt es somit nun 864 optimale Lösungen mit drei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 6. Zug von Schwarz erreicht.

### A[10,0]

Der zehnte schwarze Zug besucht das Feld a5, und wir erhalten  $F[10,0] = 22$ . Der Zug sSc6-a5 wird benötigt, und zur Vorbereitung damit auch sSb8-c6. Damit verschwinden die beiden schwarzen Freizüge am Ende der Partie: Der spätere der beiden Züge Sb8-c6 und c7-c5 ist zwar immer noch ein Freizug, aber er kann nicht im letzten Zug erfolgen. Wir kommen immer noch mit 8,5 Zügen aus, wobei die acht schwarzen Züge bereits ohne Lb4-c3 komplett verplant sind, d.h. die Verantwortung für den Besuch auf c3 muss bei Weiß verbleiben. Schwarz muss im letzten Zug ein Feld verlieren und kann im vorletzten Zug einen Freizug unterbringen; dies geht auf den ersten Blick entweder durch 7... Sb8-c6 und 8... Sc6-a5 oder durch 7... c7-c5 und 8... Dd8-c7. Bei Weiß stellt sich diesmal heraus, dass

im Rückwärtsspiel sogar vier Züge am Partieende nach der Rochade platziert werden können, die alle nur genau ein Feld verlieren – neben e4-e5, a2-a3 und Tf1-e1 kommt noch Sb1-c3 hinzu. Um kein Problem mit dem Läuferschach zu erhalten, darf der Läuferzug sLf8-b4 im Partieverlauf erst nach wO-O geschehen. Da nach Lf8-b4 noch c7-c5 und Dd8-c7 kommen muss, scheidet das Manöver 7... Sb8-c6 und 8... Sc6-a5 nun aus. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 e6 3. Sf3 Sc6 4. Ld3 Ld7 5. O-O Lb4 6. Sc3 Sa5 7. e5 c5 8. a3 Dc7 9. Te1 (8,5 Züge). Bei Weiß sind wieder die beiden ersten Züge vertauschbar, außerdem die beiden Züge Nr. 3+4, und die Reihenfolge der letzten vier Züge ist komplett beliebig (24 Möglichkeiten). Bei Schwarz kann die Reihenfolge der drei Züge Nr. 2-4 beliebig gewählt werden (6 Möglichkeiten), während die übrigen Züge feststehen. Insgesamt erhalten wir 576 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[10,5]**

Der elfte weiße Zug besucht das Feld g5, und wir erhalten  $F[10,5] = 23$ . Der Zug wSf3-g5 muss in die Partie integriert werden, und dazu müssen wir die Lösung verlängern. Indem Weiß die Verantwortung für das Feld c3 wieder an Schwarz abgibt, gelingt es nun, mit einem einzigen zusätzlichen Halbzug auszukommen. Der wSb1 bleibt zu Hause, und sLf8-b4 muss wieder nach wO-O geschehen. Da nach sLf8-b4 noch Lb4-c3, c7-c5 und Dd8-c7 gespielt werden müssen, ist keine Zeit mehr für Sb8-c6-a5, und deshalb muss Sb8-c6 wieder vor c7-c5 geschehen, d.h. c7-c5 ist der schwarze Freizug. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 e6 3. Sf3 Sc6 4. Ld3 Ld7 5. O-O Lb4 6. e5 Lc3 7. a3 Sa5 8. Te1 c5 9. Sg5 Dc7 (9,0 Züge). Bei Weiß sind wieder die beiden Züge Nr. 1+2 und Nr. 3+4 jeweils vertauschbar, und außerdem ist die Reihenfolge der letzten vier Züge beliebig. Bei Schwarz können die drei Züge Nr. 2-4 in beliebiger Reihenfolge geschehen, und außerdem sind die beiden Züge Nr. 6-7 vertauschbar. Insgesamt erhalten wir 1.152 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[11,0]**

Der elfte schwarze Zug besucht das Feld g6, und wir erhalten  $F[11,0] = 24$ . Der Zug sSe7-g6 muss in der Lösung vorkommen, und zur Vorbereitung wird außerdem Sg8-e7 benötigt. Die Partie verlängert sich um zwei Halbzüge, und der Besuch auf dem Feld c3 wird jetzt wieder von Weiß übernommen (wSb1-c3). Damit Weiß Sb1-c3 nach der Rochade ziehen kann, muss sLf8-b4 ebenfalls nach wO-O geschehen. Weiß verliert in den letzten fünf Zügen der Partie jeweils ein Feld; Schwarz verliert in den Zügen Nr. 10, 8 und 6 je ein Feld und kann dazwischen jeweils einen Freizug einschieben. Einer der beiden Freizüge ist Sg8-e7, der andere ist der spätere der beiden Züge c7-c5 und Sb8-c6. Der Zug Se7-g6 geschieht nach dem Freizug Sg8-e7 und muss deshalb im 8. oder 10. Zug stattfinden. Nach Lf8-b4 erfolgen in der Partie noch die vier Züge c7-c5, Dd8-c7 und Sg8-e7-g6. Für das zweizügige Manöver Sb8-c6-a5 ist damit nicht mehr genügend Zeit, so dass der Zug Sb8-c6 im Partieverlauf auf jeden Fall vor c7-c5 geschehen muss. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 e6 3. Sf3 Sc6 4. Ld3 Ld7 5. O-O Lb4 6. Sc3 Sa5 7. e5 c5 8. a3 Dc7 9. Te1 Se7 10. Sg5 Sg6 (10,0 Züge). Bei Weiß sind wie gewohnt die beiden Züge Nr. 1+2 und die beiden Züge Nr. 3+4 jeweils vertauschbar; und diesmal ist sogar die Reihenfolge der letzten fünf Züge untereinander komplett frei (120 Möglichkeiten). Bei Schwarz geschehen die drei Züge Nr. 2-4 in beliebiger Reihenfolge (6 Möglichkeiten), und außerdem sind die beiden zweizügigen Manöver 7... c5 8... Dc7 und 9... Se7 10... Sg6 miteinander vertauschbar. Insgesamt erhalten wir 5.760 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[11,5]**

Der zwölfte Zug von Weiß besucht kein neues Feld. Der Zug  $wTe1-e3$  kann in der Lösung keine sinnvolle Rolle spielen, weil die beiden Züge  $e2-e4$  und  $Lf1-d3$  zur Vorbereitung der Rochade ohnehin benötigt werden. Also ändert sich an den optimalen Lösungen im Vergleich zur vorangegangenen Aufgabe A[11,0] nichts.

### **A[12,0]**

Der zwölfte schwarze Zug besucht das Feld  $c4$ , und wir erhalten  $F[12,0] = 25$ . Der Zug  $c5-c4$  muss in der Lösung vorkommen. Es gibt elf schwarze Züge, die zwingend erforderlich sind, so dass die Lösung auf 11,0 Züge verlängert werden muss. Weiß benötigt im 11. Zug einen Freizug als Abwartezug, und dafür kommt nur der Zug  $Te1-e3$  in Frage. In den Zügen Nr. 6-10 verliert Weiß wieder je ein Feld; unter anderem ist auch der Zug  $Sb1-c3$  dabei. Der Läuferzug  $sLf8-b4$  muss wieder nach  $wO-O$  geschehen, und zwar im 5. Zug. Schwarz verliert in den Zügen Nr. 6, 7, 9 und 11 je ein Feld und kann dazwischen in den Zügen Nr. 8 und 10 zwei Freizüge unterbringen. Einer der beiden Freizüge ist wieder  $Sg8-e7$ , und der andere ist der spätere der beiden Züge  $c7-c5$  und  $Sb8-c6$ . Dadurch, dass jetzt neu der Bauernzug  $c5-c4$  verfügbar ist, muss  $c7-c5$  im Partieverlauf nicht mehr zwingend nach  $Lf8-b4$  gespielt werden – es kann auch bereits vorher  $c7-c5-c4$  geschehen. Andererseits müssten, wenn  $c7-c5$  ein Freizug wäre, danach im Partieverlauf noch die zwei Züge  $c5-c4$  und  $Dd8-c7$  erfolgen, die beide ein Feld verlören – und nach  $Sg8-e7$  kommt ja auch noch  $Se7-g6$ . Daraus folgt, dass  $c7-c5$  diesmal kein Freizug sein kann, sondern dass  $Sb8-c6$  der zweite Freizug neben  $Sg8-e7$  sein muss. Die beiden schwarzen Züge Nr. 9 und 11 sind deshalb  $Sc6-a5$  und  $Se7-g6$  (in beliebiger Reihenfolge). Nach  $sLf8-b4$  ist nicht mehr genug Zeit für das Manöver  $c7-c5-c4$  und  $Dd8-c7$ , und deshalb muss  $c7-c5-c4$  bereits vor  $Lf8-b4$  gespielt werden. Damit erhalten wir 1.  $e4 d5$  2.  $d4 c5$  3.  $Sf3 e6$  4.  $Ld3 c4$  5.  $O-O Lb4$  6.  $Sc3 Ld7$  7.  $e5 Dc7$  8.  $a3 Se7$  9.  $Te1 Sg6$  10.  $Sg5 Sc6$  11.  $Te3 Sa5$  (11,0 Züge). Für die weiße Zugreihenfolge gibt es wieder die bereits bekannten  $2 * 2 * 120$  Varianten. Bei Schwarz sind diesmal die ersten beiden Züge untereinander vertauschbar und ebenso die Züge Nr. 3+4 und die Züge Nr. 6+7. Außerdem sind die beiden zweizügigen Manöver  $Sb8-c6-a5$  und  $Sg8-e7-g6$  miteinander vertauschbar. Insgesamt erhalten wir 7.680 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[12,5]**

Im 13. weißen Zug wird kein neues Feld besucht. Der Zug  $wLd3-e2$  kann nicht genutzt werden, um die Lösung zu verbessern, aber immerhin stellt er eine Alternative zum Abwartezug 11.  $Te1-e3$  dar. Die optimalen Lösungen sind also im Grundsatz die gleichen wie in der vorigen Aufgabe A[12,0], aber ihre Anzahl verdoppelt sich auf 15.360. Es gibt zwei verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 5,0 Zügen erreicht.

### **A[13,0]**

Der 13. schwarze Zug besucht kein neues Feld und ist auch sonst für die Lösung nicht zu gebrauchen. An den optimalen Lösungen ändert sich nichts.

### A[13,5]

Der 14. weiße Zug besucht die beiden neuen Felder g4 und h5. Wir erhalten  $F[13,5] = 27$ . Der Zug  $wLe2-h5$  muss in der Lösung vorkommen, und zur Vorbereitung wird außerdem  $Ld3-e2$  benötigt. Die Lösung verlängert sich damit um einen halben Zug auf 11,5 Züge. Da der Zug  $wLe2-h5$  zwei Felder verliert, ist es sinnvoll, ihn im Rückwärtsspiel aus der Schlussstellung möglichst lange zu meiden bzw. ihn möglichst weit vorn in der Partie unterzubringen. Es zeigt sich, dass durch die Vertauschung der Reihenfolge zwischen den beiden Zügen  $Lf1-d3$  und  $d2-d4$  dieser Bauernzug nun nur ein Feld verliert und deshalb in der Schlussphase der Partie zurückgenommen werden kann, gemeinsam mit  $Tf1-e1$ ,  $Sb1-c3$ ,  $Sf3-g5$ ,  $a2-a3$  und  $e4-e5$ . Weiß nimmt damit am Parteeende sechs Züge zurück, die je ein Feld verlieren. Im 6. Zug ist dann im Rückwärtsspiel die Rochade erzwungen, und davor ist 5.  $Sg1-f3$  ein Freizug. Der Verlauf der ersten vier Züge von Weiß liegt damit fest. Schwarz kann (wie in den vorangegangenen Lösungen) im Rückwärtsspiel im 11. und 9. Zug je ein Feld verlieren und im 10. und 8. Zug einen Freizug ausführen. Dadurch, dass der Bauernzug  $d2-d4$  im Partieverlauf erst nach  $wO-O$  erfolgt, müssen wir diesmal kein Schach auf der Diagonalen  $b4-e1$  vermeiden und können entsprechend den Läuferzug  $sLf8-b4$  weit vorn im Partieverlauf unterbringen. In den fünf Zügen Nr. 3-7 verliert Schwarz jeweils ein Feld. Wir erhalten die optimale Lösung 1.  $e4 e6$  2.  $Ld3 Lb4$  3.  $Le2 d5$  4.  $Lh5 c5$  5.  $Sf3 Ld7$  6.  $O-O Dc7$  7.  $d4 c4$  8.  $Sc3 Se7$  9.  $e5 Sg6$  10.  $a3 Sc6$  11.  $Te1 Sa5$  12.  $Sg5$  (11,5 Züge). Bei Weiß sind die ersten sechs Züge eindeutig, während die letzten sechs Züge in beliebiger Reihenfolge gespielt werden können (720 Möglichkeiten). Bei Schwarz ist die Reihenfolge der fünf Züge Nr. 3-7 beliebig, wobei allerdings  $d7-d5$  vor  $Lc8-d7$  erfolgen muss und  $c7-c5$  sowohl vor  $Dd8-c7$  als auch vor  $c5-c4$ . Das ergibt 20 verschiedene Verläufe für diese fünf Züge: zwei verschiedene Anordnungen für die drei Züge  $c7-c5$ ,  $c5-c4$ ,  $Dd8-c7$  sowie eine eindeutige Anordnung der beiden übrigen Züge, und diese beiden Anordnungen von drei und zwei Zügen können auf zehn Arten miteinander verschränkt werden. Die beiden zweizügigen Manöver  $Sb8-c6-a5$  und  $Sg8-e7-g6$  am Parteeende sind wieder miteinander vertauschbar. Insgesamt erhalten wir 28.800 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### A[14,0] und A[14,5]

Der 14. schwarze und der 15. weiße Zug besuchen keine neuen Felder und spielen für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle. An den optimalen Lösungen ändert sich nichts.

### A[15,0]

Der 15. schwarze Zug besucht die neuen Felder  $b5$  und  $a4$ . Wir erhalten  $F[15,0] = 29$ . Der Zug  $sLd7-a4$  muss in der Lösung vorkommen – und zwar möglichst früh im Partieverlauf, weil er zwei Felder verliert. Die Lösung verlängert sich um einen halben Zug auf 12,0 Züge. An den weißen Manövern ändert sich nichts. Bei Schwarz wird der Zug  $c7-c5$  nun dank  $Lf8-b4$  und  $Ld7-a4$  zu einem Freizug. Schwarz kann in den Zügen Nr. 6, 9 und 11 Freizüge ausführen und dazwischen in den Zügen Nr. 7, 8, 10 und 12 jeweils nur ein Feld verlieren. Der Zug  $Ld7-a4$  verliert drei Felder und erhält im Rückwärtsspiel Vorrang vor  $Lf8-b4$ , weil er in den Zügen Nr. 4 und 3 die zweimalige Rücknahme von Zügen ermöglicht, die nur je ein Feld verlieren. Wir erhalten 1.  $e4 e6$  2.  $Ld3 Lb4$  3.  $Le2 d5$  4.  $Lh5 Ld7$  5.  $Sf3 La4$  6.  $O-O c5$  7.  $d4 Dc7$  8.  $Sc3 c4$  9.  $e5 Se7$  10.  $a3 Sg6$  11.  $Te1 Sc6$  12.  $Sg5 Sa5$  (12,0 Züge). Bei Weiß gibt es wieder 720 Möglichkeiten für die Zugreihenfolge. Bei Schwarz können die beiden Züge Nr. 7+8 vertauscht werden, und außerdem sind die beiden zweizügigen Manöver  $Sb8-c6-a5$  und  $Sg8-e7-g6$  miteinander vertauschbar. Es gibt 2.880 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[15,5]**

Der 16. weiße Zug besucht das neue Feld a2, und wir erhalten  $F[15,5] = 30$ . Die Hälfte der 60 Felder, die von der Partie *CarCar* insgesamt besucht werden, ist damit bereits erreicht. Der Zug  $wTa1-a2$  reiht sich am Ende der Lösung als siebtes Mitglied in die Gruppe der weißen Züge ein, die jeweils nur ein Feld verlieren. Davon abgesehen, ändert sich am Lösungsverlauf nichts: 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. Sf3 La4 6. O-O c5 7. d4 Dc7 8. Sc3 c4 9. e5 Se7 10. a3 Sg6 11. Te1 Sc6 12. Sg5 Sa5 13. Ta2 (12,5 Züge). Die letzten sieben weißen Züge können in beliebiger Reihenfolge gespielt werden, wobei allerdings a2-a3 vor Ta1-a2 erfolgen muss – das ergibt für diese sieben Züge 2.520 verschiedene Reihenfolgen. Insgesamt erhalten wir 10.080 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[16,0]**

Der 16. schwarze Zug besucht das neue Feld f5, und wir erhalten  $F[16,0] = 31$ . Der Zug  $sSe7-f5$  wird für die Lösung benötigt. Da wir die beiden Springerzüge  $Se7-g6$  und  $Se7-f5$  haben und beide Springer die Felder g6 und f5 danach nicht mehr verlassen können, müssen beide sSS im Partieverlauf nach e7 gebracht werden, und deshalb benötigen wir neben  $Sg8-e7$  und  $Sb8-c6-a5$  jetzt zusätzlich noch das Manöver  $Sa5-c6-e7$ . Es sind drei zwingend erforderliche schwarze Züge hinzugekommen, und deshalb verlängert die optimale Lösung sich nun auf 15,0 Züge. Die letzten beiden weißen Züge sind Abwartezüge (Freizüge). Schwarz hat es in der Schlussphase der Partie mit einer Reihe von Zügen zu tun, die entweder Freizüge sind oder genau ein Feld verlieren. Die günstigste Reihenfolge entsteht dabei im Rückwärtsspiel, wenn die Freizüge an den Positionen Nr. 14, 13, 11, 9 und 6 untergebracht werden. Bei Weiß ändert sich in den ersten 13 Zügen nichts gegenüber der Lösung der vorangegangenen Aufgabe A[15,5]. Die beiden Abwartezüge am Schluss müssen die beiden Züge  $Te1-e3$  und  $Dd1-g4$  sein (in beliebiger Reihenfolge). Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. Sf3 La4 6. O-O c5 7. d4 Dc7 8. Sc3 c4 9. e5 Se7 10. a3 Sg6 11. Te1 Sc6 12. Sg5 Sa5 13. Ta2 Sc6 14. Te3 Sce7 15. Dg4 Sf5 (15,0 Züge). Bei Weiß haben wir in den sieben Zügen Nr. 7-13 wieder 2.520 verschiedene Reihenfolgen; außerdem sind die beiden Abwartezüge am Ende vertauschbar. Bei Schwarz sind die Züge Nr. 7+8 vertauschbar. Außerdem sind die Züge, die die beiden Springer von e7 aus ausführen, untereinander vertauschbar: Es ist zwar klar, dass der Damenspringer die beiden Freizüge 13...  $Sa5-c6$  und 14...  $Sc6-e7$  ausführt und dass deshalb der Königsspringer im Partieverlauf früher auf e7 ankommt als der Damenspringer, aber der Königsspringer könnte statt nach g6 auch nach f5 ziehen (und der Damenspringer dann natürlich nach g6). Die beiden zweizügigen Springermanöver in den Zügen Nr. 9-12 lauten einerseits  $Sb8-c6-a5$  und andererseits entweder  $Sg8-e7-g6$  oder  $Sg8-e7-f5$ , und sie sind in der Reihenfolge untereinander vertauschbar. Für Schwarz gibt es damit  $2 * 2 * 2 = 8$  Zugreihenfolgen. Insgesamt erhalten wir 40.320 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[16,5]**

Im 17. weißen Zug wird kein neues Feld besucht. Der Zug  $wTe3-e1$  kann nicht genutzt werden, um die Lösung zu verbessern, aber er kann (im Fall von 14.  $Te3$ ) im 15. Zug als Abwartezug verwendet werden. Statt bisher zwei gibt es damit nun drei mögliche Kombinationen für die beiden weißen Abwartezüge am Ende der Partie. Die Anzahl der optimalen Lösungen erhöht sich auf 60.480, und es gibt zwei verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 6,0 Zügen erreicht.

### **A[17,0]**

Der 17. schwarze Zug besucht mit b8, c8 und d8 gleich drei neue Felder, und wir erhalten  $F[17,0] = 34$ . Die schwarze Rochade O-O-O wird für die Lösung benötigt, so dass die optimale Lösung sich auf 16,0 Züge verlängert. Weiß macht am Ende jetzt schon drei Abwartezüge. Schwarz verliert im Rückwärtsspiel zunächst ein Feld (im 16. Zug), verfügt dann über zwei Freizüge (15. und 14. Zug), verliert dann erneut ein Feld (13. Zug), hat dann nochmals einen Freizug (12. Zug) und verliert dann zweimal je ein Feld (11. und 10. Zug), bevor er schließlich gezwungen ist, im 9. Zug die Rochade zurückzunehmen. Davor gibt es dann noch einen Freizug im 8. Zug, den Verlust eines Feldes im 7. Zug und nochmals einen Freizug im 6. Zug. Die ersten fünf Züge der Partie bleiben wie gehabt. Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. Sf3 La4 6. O-O c5 7. d4 Dc7 8. Sc3 Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Sa5 11. Te1 c4 12. Sg5 Se7 13. Ta2 Sg6 14. Te3 Sc6 15. Dg4 Sce7 16. Te1 Sf5 (16,0 Züge). Für die drei weißen Abwartezüge am Ende der Lösung stehen die drei Kandidaten Te1-e3, Te3-e1 und Dd1-g4 zur Verfügung. Wenn diese Züge alle drei verwendet werden, gibt es dafür drei mögliche Reihenfolgen – dazu gesellt sich als vierte Möglichkeit noch das Turmpendel Te1-e3-e1-e3. Für die ersten 13 weißen Züge gibt es wieder die bereits gewohnten 2.520 Kombinationen. Bei Schwarz sind die ersten neun Züge eindeutig. Die Züge Nr. 10+11 sind vertauschbar, und im 13. Zug besteht die Auswahl zwischen den beiden Feldern g6 und f5. Für die schwarzen Manöver gibt es damit zusammen vier Verläufe. Insgesamt erhalten wir 40.320 optimale Lösungen mit zwei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 12,5 Zügen erreicht.

### **A[17,5]**

Im 18. weißen Zug wird kein neues Feld besucht. Der Zug wSg5-f3 kann nicht genutzt werden, um die Lösung zu verbessern, aber er kann in den letzten drei Zügen als Abwartezug verwendet werden. Zusammen mit dem bereits vorhandenen Zug Sf3-g5 lässt er sich sogar zu einem Pendel Sg5-f3-g5 oder Sg5-f3-g5-f3 erweitern. Es ist zu beachten, dass der Springer, wenn er auf f3 steht, den Damenzug Dd1-g4 verhindert. Wenn der Springer genau einmal zieht, gibt es in den letzten drei weißen Zügen sechs Varianten; wenn der Springer genau zweimal zieht, sind es fünf Varianten, und wenn er dreimal zieht, ist der Verlauf eindeutig. Zu den bisherigen vier Verläufen der drei Abwartezüge kommen deshalb jetzt noch zwölf hinzu. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen erhöht sich auf 161.280. Da die Pendelmanöver Te1-e3-e1 und Sg5-f3-g5-f3 in vielen Fällen auf die gleiche Stellung hinauslaufen, erhöht sich die Anzahl der Schlussstellungen nur leicht: Mit Sg5 kommen überhaupt keine Stellungen hinzu, und mit Sf3 sind es nur zwei. Wir haben also vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird unverändert nach 12,5 Zügen erreicht.

### **A[18,0]**

Der 18. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle. An den optimalen Lösungen ändert sich nichts.

### **A[18,5]**

Der 19. weiße Zug besucht die neuen Felder h3 und h4, und wir erhalten  $F[18,5] = 36$ . Der Bauernzug h2-h4 wird für die Lösung benötigt. Die Zügezahl bleibt gleich, aber Weiß stehen jetzt am Ende nur noch zwei Abwartezüge zur Verfügung. Im Rückwärtsspiel wird der Zug h2-h4 lange vermieden, da er zwei Felder verliert. Sogar gegenüber der Rochade wO-O wird h2-h4 im Rückwärtsspiel noch zurückgestellt, weil jene den Freizug Sg1-f3 ermöglicht. Erst im Vergleich mit Le2-h5 muss h2-h4 dann im Rückwärtsspiel schließlich ausgewählt werden. Der Bauernzug fügt sich damit im 5. Zug in den Partieverlauf ein; ansonsten ändert sich wenig: 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. e5 Sa5 11. a3 c4 12. Te1 Se7 13. Sg5 Sg6 14. Ta2 Sc6 15. Te3 Sce7 16. Dg4 Sf5 (16,0 Züge). Bei Weiß sind die ersten sieben Züge eindeutig, und für die nächsten sieben Züge gibt es 2.520 Kombinationen. Für die beiden Abwartezüge am Ende stehen die Manöver Te1-e3-e1, Sg5-f3-g5 und Dd1-g4 zur Verfügung; daraus lassen sich sieben Kombinationen zusammensetzen. Bei Schwarz sind wieder die Züge Nr. 10+11 vertauschbar, und im 13. Zug gibt es die Auswahl zwischen den Feldern g6 und f5. Insgesamt erhalten wir 70.560 optimale Lösungen und vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 7,0 Zügen erreicht.

### **A[19,0]**

Der 19. schwarze Zug besucht die neuen Felder e8 und f8, und wir erhalten  $F[19,0] = 38$ . Der Turmzug sTd8-f8 wird für die Lösung benötigt. Die Zügezahl der Lösung erhöht sich auf 17,0, und Weiß macht am Ende wieder drei Abwartezüge. Der neue schwarze Turmzug, der zwei Felder verliert, reiht sich im Rückwärtsspiel im 10. Zug von Schwarz ein (unmittelbar im Anschluss an die Rochade). Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 Sa5 12. Te1 c4 13. Sg5 Se7 14. Ta2 Sg6 15. Te3 Sc6 16. Dg4 Sce7 17. Te1 Sf5 (17,0 Züge). Bei Schwarz haben wir wieder die bereits bekannten vier Wahlmöglichkeiten in der Zugreihenfolge. Bei Weiß sind es in den ersten 14 Zügen die üblichen 2.520 Kombinationen, und für die dreizügige Schlussphase haben wir die 16 Kombinationen, die wir bereits oben unter A[17,5] und A[18,0] ermittelt hatten. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen beträgt 161.280, und es gibt vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 13,5 Zügen erreicht.

### **A[19,5]**

Im 20. weißen Zug wird kein neues Feld besucht. Der Zug wDg4-h3 kann nicht genutzt werden, um die Lösung zu verbessern, aber er kann in den letzten drei Zügen als Abwartezug verwendet werden. Es gibt fünf mögliche Kombinationen von Abwartezügen in den letzten drei Zügen von Weiß, in denen der Zug Dg4-h3 vorkommt. Die Anzahl der weißen Schlussphasen erhöht sich also von bisher 16 auf jetzt 21. Es ergeben sich insgesamt 211.680 optimale Lösungen und sechs verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird unverändert nach 13,5 Zügen erreicht.

### **A[20,0]**

Der 20. schwarze Zug besucht kein neues Feld, aber der Zug sSg6-e7 kann verwendet werden, um die Manöver der schwarzen Springer abzukürzen. Die zweizügige Wanderung Sa5-c6-e7 wird durch Sg6-e7 ersetzt, so dass die Lösung insgesamt nur noch 16,0 Züge umfasst. Bei Weiß entfällt einer der drei Abwartezüge. Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 Sa5 12. Te1 c4 13. Sg5 Se7 14. Ta2 Sg6 15. Te3 Se7 16. Dg4 Sf5

(16,0 Züge). Bei Schwarz sind nur die Züge Nr. 11+12 vertauschbar, der Rest der Zugfolge ist eindeutig. Bei Weiß haben wir in den ersten 14 Zügen wieder die gewohnten 2.520 Kombinationen. Für die beiden Abwartezüge in der Schlussphase stehen die Züge Dd1-g4-h3, Te1-e3-e1 und Sg5-f3-g5 zur Verfügung, daraus lassen sich acht Kombinationen bilden. Es gibt 40.320 optimale Lösungen mit fünf verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Stellung wird mit dem 14. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[20,5]**

Der 21. weiße Zug besucht das neue Feld h2, und wir erhalten  $F[20,5] = 39$ . Der Damenzug wDh3-h2 wird für die Lösung benötigt, und zur Vorbereitung auch die beiden Züge Dd1-g4-h3. Die Lösung verlängert sich damit auf 16,5 Züge, und es gibt keine Abwartezüge. Wenn wir aus der Schlussstellung heraus als 17. Zug von Weiß zunächst den Läuferzug Le2-h5 zurücknehmen, so verliert dieser genau ein Feld und ermöglicht im 16. Zug den Freizug Ld3-e2 – aber nur diesen einen Freizug. Wenn wir andererseits 17. Dh3-h2 zurücknehmen, so verliert dieser Zug ebenfalls ein Feld, aber davor werden die beiden Freizüge 16. Dg4-h3 und 15. Dd1-g4 möglich. Also muss die Partie mit dem dreizügigen weißen Damenmanöver enden. Der Rest verläuft analog zur Lösung der vorangegangenen Aufgabe A[20,0]. Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 Sa5 12. Te1 c4 13. Sg5 Se7 14. Ta2 Sg6 15. Dg4 Se7 16. Dh3 Sf5 17. Dh2 (16,5 Züge). Für die schwarze Zugfolge gibt es wieder genau zwei Möglichkeiten, für die weiße die gewohnten 2.520 Kombinationen. Insgesamt gibt es 5.040 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[21,0]**

Der 21. schwarze Zug besucht das neue Feld h6, und wir erhalten  $F[21,0] = 40$ . Der Bauernzug h7-h6 wird für die Lösung benötigt, und die Lösung verlängert sich um einen Halbzug auf 17,0 Züge. Der neue Zug h7-h6 sortiert sich in der Zugfolge an der Position 11-13 ein; er ist gleichwertig mit Sc6-a5 und c5-c4. Der Rest der Lösung verläuft wieder analog wie in der vorangegangenen Aufgabe A[20,5]. Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 Sa5 12. Te1 c4 13. Sg5 h6 14. Ta2 Se7 15. Dg4 Sg6 16. Dh3 Se7 17. Dh2 Sf5 (17,0 Züge). Für die schwarze Zugfolge gibt es jetzt sechs Möglichkeiten, weil die drei Züge Nr. 11-13 untereinander beliebig vertauschbar sind. Für die weiße Zugfolge haben wir wieder die üblichen 2.520 Kombinationen. Insgesamt gibt es 15.120 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[21,5]**

Der 22. weiße Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle. An den optimalen Lösungen ändert sich nichts.

### **A[22,0]**

Der 22. schwarze Zug besucht kein neues Feld. Mit dem Bauernzug g7-g5 gelingt es aber, die Lösung in zweifacher Hinsicht zu verkürzen. Erstens besucht g7-g5 das Feld g6, so dass wir auf das Springermanöver sSe7-g6-e7 verzichten können. Dies spart einen Zug von Schwarz ein. Zweitens

besucht g7-g5 auch das Feld g5, so dass wir den weißen Zug Sf3-g5 weglassen dürfen. Insgesamt verkürzt sich die Lösung damit um einen ganzen Zug auf 16,0 Züge. Weil der weiße Königsspringer das Feld f3 nach Sg1-f3 nicht mehr verlässt, muss nicht nur der Läuferzug Le2-h5, sondern auch Dd1-g4 bereits vor diesem Springerzug geschehen. Bei Schwarz sortiert der neue Bauernzug g7-g5 sich in der Reihenfolge im 10.-11. Zug ein, da er wie Td8-f8 zwei Felder verliert. Wir erhalten 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Dg4 c5 7. Sf3 Dc7 8. O-O Sc6 9. d4 O-O-O 10. Sc3 Tf8 11. e5 g5 12. a3 Sa5 13. Te1 c4 14. Ta2 h6 15. Dh3 Se7 16. Dh2 Sf5 (16,0 Züge). Bei Schwarz sind die beiden Züge Nr. 10-11 vertauschbar (2 Möglichkeiten), und die drei Züge Nr. 12-14 sind beliebig vertauschbar (6 Möglichkeiten). Bei Weiß sind die sechs Züge Nr. 9-14 beliebig vertauschbar, wobei aber a2-a3 vor Ta1-a2 stattfinden muss; dafür gibt es 360 Möglichkeiten. Insgesamt gibt es 4.320 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### A[22,5]

Der 23. weiße Zug besucht kein neues Feld. Durch Verwendung des Bauernzugs h4-h5 können wir uns in der Lösung aber das zweizügige Manöver Ld3-e2-h5 sparen. Die Gesamtlänge der Lösung wird dadurch zwar nicht beeinflusst, aber Weiß hat nun am Ende einen Abwartezug (Freizug) zur Verfügung. Durch den Verzicht auf den Zug Le2-h5 wird der Damenzug Dd1-g4 aufgewertet: Er verliert jetzt mindestens zwei Felder. Außerdem muss jetzt wieder d2-d4 vor Lf1-d3 erfolgen und damit auch vor wO-O, so dass im Zusammenhang mit sLf8-b4 das potenzielle Schach auf der Diagonalen b4-e1 zu beachten ist. Da der weiße Damenspringer auf c3 als Schachschutz benötigt wird, muss Sb1-c3 im Partieverlauf vor wO-O geschehen; und damit der Zug Sb1-c3 im Rückwärtsspiel im 5. Zug möglich wird, darf Schwarz diesmal den Königsläufer im Lösungsverlauf erst nach dem Damenläufer herausbringen. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 Sa5 13. h5 c4 14. Dh3 h6 15. Dh2 Se7 16. Sxg5 Sf5 (16,0 Züge). Bei Schwarz sind die beiden Züge Nr. 10-11 und die drei Züge Nr. 12-14 jeweils beliebig vertauschbar; bei Weiß trifft dies auf die beiden Züge Nr. 3+4, auf die beiden Züge Nr. 6+7 und auf die fünf Züge Nr. 9-13 zu (wobei a2-a3 vor Ta1-a2 stattfindet: 60 Kombinationen). Für den Abwartezug im letzten Zug von Weiß kommen die drei Möglichkeiten Te1-e3, Ld3-e2 und Sf3-g5 in Frage. Insgesamt gibt es 8.640 optimale Lösungen mit drei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird im 15. Zug von Schwarz erreicht.

### A[23,0]

Der 23. schwarze Zug besucht das neue Feld g7, und wir erhalten  $F[23,0] = 41$ . Der Springerzug sSf5-g7 wird für die Lösung benötigt, und die Lösung verlängert sich dadurch auf 17,0 Züge. Weiß muss am Partieende jetzt zwei Abwartezüge machen. Der Versuch, durch frühzeitiges wSf3-g5 das Feld bereits zu besuchen, bevor Schwarz dies durch g7-g5 erledigt, ist nicht zielführend, weil g7-g5 bereits vergleichsweise früh im Partieverlauf stattfindet und Weiß durch das beschriebene Manöver am Ende der Partie einen Freizug verliere. Dieser Ansatz wäre deshalb nur dann sinnvoll, wenn der Zug g7-g5 in die Schlussphase der Partie fiel, in der Weiß ohnehin nur noch mit Abwartezügen beschäftigt ist. Nachdem wir uns von dieser Idee somit verabschiedet haben, brauchen wir nun nur noch in der Lösung der vorangegangenen Aufgabe A[22,5] am Ende den neuen Zug Sf5-g7 anzuhängen: 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 Sa5 13. h5 c4 14. Dh3 h6 15. Dh2 Se7 16. Sxg5 Sf5 17. Te3 Sg7 (17,0 Züge). Für die Anfangsphase der Partie (bis zum 15. Zug) gibt es wie vorher 2.880 verschiedene Verläufe. Für die beiden weißen Abwartezüge in der Schlussphase stehen die Kandidaten Te1-e3-e1,

Ld3-e2 und Sf3-g5-f3 zur Verfügung. Es ist zu beachten, dass nach Ld3-e2 nicht mehr Te1-e3 geschehen kann. Es lassen sich sieben verschiedene Kombinationen für die beiden Abwartezüge bilden. Insgesamt gibt es 20.160 optimale Lösungen mit fünf verschiedenen Schlussstellungen (man beachte, dass die Stellungen nach den beiden Pendeln 16. Te3 17. Te1 und 16. Sxg5 17. Sf3 wegen des Schlags auf g5 nicht identisch sind). Die letzte eindeutige Position wird unverändert im 15. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[23,5]**

Der 24. weiße Zug besucht das neue Feld d2, und wir erhalten  $F[23,5] = 42$ . Der Springerzug wSf3-d2 wird für die Lösung benötigt. Die Zügezahl bleibt gleich, aber Weiß muss am Ende auf einen seiner beiden Abwartezüge verzichten. Dadurch, dass der wS nach Sg1-f3 das Feld f3 wieder verlässt, kann der Damenzug Dd1-g4 im Partieverlauf später erfolgen, und diese Möglichkeit erweist sich tatsächlich als vorteilhaft, weil wir dadurch nach wO-O einen weiteren Zug unterbringen können, der nur ein Feld verliert (nämlich Dd1-g4). Durch die neue Zugreihenfolge ist es weiterhin jetzt auch wieder möglich, den Zug Sb1-c3 bis nach der Rochade aufzuschieben. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. e5 Sc6 9. a3 O-O-O 10. Te1 Tf8 11. Ta2 g5 12. h5 Sa5 13. Sd2 c4 14. Dg4 h6 15. Dh3 Se7 16. Dh2 Sf5 17. Te3 Sg7 (17,0 Züge). Bei Weiß sind die Züge Nr. 1+2 vertauschbar und ebenso die Züge Nr. 3+4. Die acht Züge Nr. 7-14 können in beliebiger Reihenfolge gespielt werden, wobei allerdings a2-a3 vor Ta1-a2 geschieht und Sf3-d2 vor Dd1-g4 – dafür gibt es 10.080 Möglichkeiten. Für den Abwartezug am Ende gibt es nur die beiden Möglichkeiten Te1-e3 und Ld3-e2. Bei Schwarz sind die beiden Züge Nr. 10+11 vertauschbar, und die Reihenfolge der drei Züge Nr. 12-14 ist beliebig. Insgesamt gibt es damit 967.680 optimale Lösungen bei zwei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 16,0 Zügen erreicht.

### **A[24,0]**

Der 24. schwarze Zug besucht das neue Feld f6, und wir erhalten  $F[24,0] = 43$ . Der Bauernzug f7-f5 wird für die Lösung benötigt. Er muss nach dem Springermanöver Se7-f5-g7 geschehen, da der Bauer sonst dem Springer im Weg stünde. Die Zügezahl der Lösung erhöht sich auf 18,0 Züge, und bei Weiß haben wir am Ende zwei Abwartezüge. Ansonsten ändert sich nichts gegenüber der Lösung der vorangegangenen Aufgabe A[23,5]. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. e5 Sc6 9. a3 O-O-O 10. Te1 Tf8 11. Ta2 g5 12. h5 Sa5 13. Sd2 c4 14. Dg4 h6 15. Dh3 Se7 16. Dh2 Sf5 17. Te3 Sg7 18. Le2 f5 (18,0 Züge). Der erste der beiden Abwartezüge muss 17. Te1-e3 sein, weil es nach 17. Ld3-e2 keinen 18. Zug für Weiß mehr gäbe. Nach 17. Te3 bestehen im 18. Zug die beiden Möglichkeiten Te3-e1 und Ld3-e2. Die Gesamtzahl der Lösungen beträgt auch diesmal wieder 967.680 bei zwei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 17,0 Zügen erreicht.

### **A[24,5]**

Der 25. weiße Zug besucht kein neues Feld. Der En-passant-Schlag e5xf6 ermöglicht es Schwarz aber, den Bauernzug f7-f5 vor dem Springermanöver Se7-f5-g7 zu spielen und dadurch im vorletzten Zug einen Freizug einzuschieben. Die Lösung wird dadurch verbessert. Der Schlag e5xf6 muss im 17. Zug geschehen, da Weiß nur auf diese Weise am Ende zwei Freizüge spielen kann, und der Bauernzug f7-f5 muss unmittelbar davor gespielt werden, um den En-passant-Schlag zu ermöglichen. Wir erhalten

1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. e5 Sc6 9. a3 O-O-O 10. Te1 Tf8 11. Ta2 g5 12. h5 Sa5 13. Sd2 c4 14. Dg4 h6 15. Dh3 Se7 16. Dh2 f5 17. exf6 Sf5 18. Te3 Sg7 (18,0 Züge). Die Kombinationsmöglichkeiten der ersten 16 weißen Züge sind unverändert. Der 17. Zug ist eindeutig, und für den Abwartezug im 18. Zug gibt es wieder die beiden Möglichkeiten Te1-e3 und Ld3-e2. Bei Schwarz sind die letzten vier Züge eindeutig, und für die ersten 14 Züge gibt es die gewohnten 12 Kombinationsmöglichkeiten. Die Gesamtzahl der Lösungen beträgt unverändert 967.680 bei zwei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird nach 17,0 Zügen erreicht.

## A[25,0]

Der 25. schwarze Zug besucht die beiden neuen Felder f4 und g3, und wir erhalten  $F[25,0] = 45$ . Der Damenzug sDc7-h2 wird für die Lösung benötigt. Die Lösung verlängert sich auf 19,0 Züge, und die 19 schwarzen Züge stehen fest. Bei Weiß entfällt im Gegenzug die zwingende Notwendigkeit, die Felder e5 und h2 zu besuchen, wodurch sich die Zahl der zwingend erforderlichen weißen Züge a priori auf nur noch 13 reduziert (Rochade, 2xT, 1xL, 3xS, 4xB, dazu noch 2 Züge für den Besuch der Felder g4 und h5). Für die beiden Züge zum Besuch auf g4 und h5 kommen entweder die beiden Züge Dd1-g4 und h4-h5 in Frage oder das zweizügige Manöver Ld3-e2-h5, welches allerdings den Nachteil hat, dass der zweite Zug dann zwei Felder verliert. Natürlich unterstützt Weiß den Schwarzen dadurch, dass er – wie gewohnt – mit Sb1-c3 das Feld c3 erledigt. Zumindest in Erwägung zu ziehen sind außerdem noch die Manöver e4-e5, Dg4-h3-h2 und Sf3-g5-f3, mit denen Weiß u.U. die Felder e5, h2 und g5 früher besuchen könnte als Schwarz. Der wK steht am Schluss auf g1, und die sD landet auf h2. Damit Weiß nicht in einem illegalen Schach stehen bleibt, muss der Zug sDc7-h2 entweder der letzte der Lösung sein, oder die sD muss auf h2 geschlagen werden – was nur durch wDg4-h3-h2 möglich ist. Da sDc7-h2 mindestens die beiden Felder f4 und g3 verliert, ist es günstiger, am Ende der Partie einen schwarzen Zug zu spielen, der nur ein Feld verliert. Deshalb benötigen wir tatsächlich die beiden weißen Züge Dg4-h3-h2, um die sD zu schlagen. Die beiden genannten Züge der wD sind Freizüge. Um im letzten Zug der Partie nur ein Feld zu verlieren, stehen Schwarz die Zugmöglichkeiten Sc6-a5, Sf5-g7, c5-c4, f7-f5 und h7-h6 zur Verfügung – aber davon ermöglicht nur 19... Sf5-g7 zuvor einen schwarzen Freizug, bzw. sogar zwei: 18... Se7-f5 und 17... Sg8-e7. Weiß muss also den schwarzen f-Bauern durch e4-e5xf6 beseitigen, und zumindest der Schlag e5xf6 ist ein Freizug. Zu den ursprünglich 13 zwingend erforderlichen weißen Zügen sind also nun vier weitere hinzugekommen: Dg4-h3-h2 und e4-e5-f6. Die Rücknahme Dh3xh2 erfordert im Rückwärtsspiel von Schwarz die unmittelbare Reaktion Dc7-h2 (zumindest wenn sie im Lösungsverlauf nach wO-O geschieht), und unmittelbar vor e5xf6 muss in der Partie f7-f5 geschehen. Beide schwarzen Züge verlieren jeweils mindestens zwei Felder und sind im Rückwärtsspiel deshalb möglichst lange zu vermeiden. In den letzten beiden Zügen muss Weiß zwei Freizüge als Abwartezüge ausführen, wobei er aber auf Dh3xh2 und auf e5xf6 verzichten muss. Die ersten 17 weißen Züge der Partie stehen damit dann fest, und für das Springermanöver Sf3-g5-f3 ist keine Zeit mehr. Im 17. Zug von Weiß ist die Auswahl zwischen den beiden Freizügen Dh3xh2 und e5xf6 zu treffen; und dabei setzt sich 17. e5xf6 durch, weil sDc7-h2 in dieser Situation sogar drei Felder verlöre. Im Rückwärtsspiel folgt weiter 16... f7-f5 und 16. e4-e5 (16. Dh3xh2 scheidet aus). Schwarz nimmt im 15. Zug einen von drei möglichen Zügen zurück, die nur ein Feld verlieren. Davor ergibt sich dann 15. Dh3xh2, 14... Dc7-h2+ und 14. Dg4-h3. Die weitere Auflösung der ersten 13 Züge der Partie erfolgt dann nach gewohnten Mustern ähnlich zur Lösung der vorangegangenen Aufgabe A[24,5]. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. a3 Sc6 9. Te1 O-O-O 10. Ta2 Tf8 11. h5 g5 12. Sd2 Sa5 13. Dg4 c4 14. Dh3 Dh2+ 15. Dxh2 h6 16. e5 f5 17. exf6 Se7 18. Te3 Sf5 19. Le2 Sg7 (19,0 Züge). Bei Schwarz sind die Züge Nr. 10+11 untereinander vertauschbar, und die Reihenfolge der drei Züge

Nr. 12+13+15 ist beliebig. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1+2 und die Züge Nr. 3+4 jeweils vertauschbar; außerdem ist die Reihenfolge der sieben Züge Nr. 7-13 beliebig, wobei allerdings a2-a3 vor Ta1-a2 und Sf3-d2 vor Dd1-g4 erfolgen muss (1.260 Möglichkeiten). Für die beiden Abwartzüge am Ende der Partie kommen nur die Züge Te1-e3-e1 und Ld3-e2 in Frage, und deshalb ist zwingend 18. Te1-e3 erforderlich, während es im 19. Zug die Wahl zwischen zwei Möglichkeiten gibt. Es gibt deshalb 120.960 optimale Lösungen mit zwei verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 18. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[25,5]**

Der 26. weiße Zug besucht kein neues Feld. Der Königszug Kg1-h2 kann allerdings das zweizügige Manöver Dg4-h3-h2 ersetzen und erlaubt es deshalb, die beiden schwarzen Züge Dc7-h2 und f7-f5 im Lösungsverlauf jeweils um einen Zug vorzuziehen. Weiß macht am Partieende jetzt drei beliebige Abwartzüge. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. a3 Sc6 9. Te1 O-O-O 10. Ta2 Tf8 11. h5 g5 12. Sd2 Sa5 13. Dg4 Dh2+ 14. Kxh2 c4 15. e5 f5 16. exf6 h6 17. Te3 Se7 18. Le2 Sf5 19. Dh3 Sg7 (19,0 Züge). Für die ersten 16,0 Züge der Partie gibt es die gleichen 60.480 Kombinationsmöglichkeiten wie in der vorangegangenen Lösung der Aufgabe A[25,0]. Für die drei weißen Abwartzüge in der Schlussphase stehen die Züge Te1-e3-e1-e3, Dg4-h3 und Ld3-e2 zur Verfügung. Daraus lassen sich acht verschiedene Verläufe zusammensetzen. Es gibt 483.840 optimale Lösungen mit vier verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 16. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[26,0]**

Der 26. schwarze Zug besucht das neue Feld f7, und wir erhalten  $F[26,0] = 46$ . Der Turmzug sTf8-f6 wird für die Lösung benötigt. Die Lösung verlängert sich auf 20,0 Züge, und Weiß macht am Ende jetzt vier Abwartzüge. Der Zug sTf8-f6 muss nach f7-f5 erfolgen und verliert genau ein Feld, nämlich das Feld f7. Er reiht sich im Partieverlauf bei den anderen schwarzen Zügen ein, die nur ein Feld verlieren (Sc6-a5, c5-c4, h7-h6). Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. a3 Sc6 9. Te1 O-O-O 10. Ta2 Tf8 11. h5 g5 12. Sd2 Sa5 13. Dg4 Dh2+ 14. Kxh2 c4 15. e5 f5 16. exf6 h6 17. Te3 Txf6 18. Te1 Se7 19. Te3 Sf5 20. Le2 Sg7 (20,0 Züge). Bei Schwarz sind die Züge Nr. 10+11 vertauschbar. Die vier Züge Nr. 12+14+16+17 können ebenfalls in beliebiger Reihenfolge gespielt werden, wobei allerdings Tf8xf6 erst nach dem 15. Zug möglich ist (12 Möglichkeiten). Bei Weiß haben wir für die ersten 16 Züge die bereits bekannten 5.040 Kombinationen. In der vierzügigen Schlussphase stehen wieder nur die Züge Te1-e3-e1-e3-e1, Dg4-h3 und Ld3-e2 zur Verfügung. Mindestens zwei der vier Züge müssen vom Turm ausgeführt werden. Wenn der wT genau zweimal zieht, gibt es vier Verläufe; wenn der wT genau dreimal zieht, gibt es fünf Verläufe; und wenn der wT viermal zieht, ist der Verlauf eindeutig. Es gibt damit zehn verschiedene Verläufe für die vier weißen Abwartzüge am Ende der Partie. Wir erhalten die Gesamtzahl von 1.209.600 optimalen Lösungen mit vier verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird diesmal schon mit dem 6. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[26,5]**

Der 27. weiße Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle; er ist nicht einmal für die weißen Abwartzüge am Ende zu gebrauchen. An den optimalen Lösungen ändert sich nichts.

### **A[27,0]**

Der 27. schwarze Zug besucht das neue Feld g8, und wir erhalten  $F[27,0] = 47$ . Der Turmzug sTh8-f8 wird für die Lösung benötigt. Die Lösung verlängert sich auf 21,0 Züge, und Weiß macht am Ende nun sogar fünf Abwartezüge. Beide sTT ziehen im Lösungsverlauf auf das Feld f8, wobei der erste dieser beiden Turmzüge zwei neue Felder besucht und der zweite nur noch eines. Der erste Turm, der nach f8 gelangt, muss dieses Feld durch Tf8-f6 wieder räumen, bevor sein Kollege nach f8 zieht. Um die schwarzen Freizüge am Ende der Lösung optimal zu nutzen, ist es erforderlich, den Zug Th8-f8 zwischen Sg8-e7 und Se7-f5 einzureihen. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. a3 Sc6 9. Te1 O-O-O 10. Ta2 Tf8 11. h5 g5 12. Sd2 Sa5 13. Dg4 Dh2+ 14. Kxh2 c4 15. e5 f5 16. exf6 h6 17. Te3 Txf6 18. Te1 Se7 19. Te3 Thf8 20. Le2 Sf5 21. Dh3 Sg7 (21,0 Züge). Ohne die fünf weißen Abwartezüge am Ende gibt es 120.960 Kombinationsmöglichkeiten für den Lösungsverlauf. Die fünf Abwartezüge setzen sich wieder aus den Kandidaten Te1-e3-e1-e3-e1-e3, Dg4-h3 und Ld3-e2 zusammen. Der Turm zieht dabei mindestens dreimal. Mit drei Zügen des wT gibt es fünf Verläufe, mit vier Zügen des wT sind es sechs Verläufe und mit fünf Zügen des wT noch einer. Zusammen haben wir also zwölf Verläufe für die fünf Abwartezüge in der Schlussphase. Insgesamt erhalten wir 1.451.520 optimale Lösungen mit vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird wieder mit dem 6. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[27,5]**

Im 28. weißen Zug wird kein neues Feld besucht. Der Zug wSd2-f1 kann nicht genutzt werden, um die Lösung zu verbessern, aber er kann in den letzten fünf Zügen als Abwartezug verwendet werden. Zu den zwölf Verläufen der fünf Abwartezüge, die wir schon kennen, kommen unter Beteiligung des Zuges Sd2-f1 jetzt noch 50 weitere hinzu. Insgesamt erhalten wir also 62 Verläufe für die weiße Schlussphase und damit 7.499.520 optimale Lösungen. Es gibt acht verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 6. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[28,0] bis A[29,0]**

Der 28. schwarze Zug ist eine Zugwiederholung in der Partie *CarCar* und ändert damit nichts an der Aufgabenstellung. Der 29. weiße Zug besucht kein neues Feld, kann die Lösung nicht verbessern und ist auch nicht als Abwartezug in der Schlussphase verwendbar. Der 29. schwarze Zug besucht ebenfalls kein neues Feld. Durch den Besuch auf dem Feld e8 ist zu prüfen, ob der Läuferzug sLa4-e8 vielleicht in der Lösung den Turmzug sTd8-f8 ersetzen könnte. Dann verlöre allerdings der Turmzug sTh8-f8 zwei Felder, und da dieser Zug nach sSg8-e7 erfolgen müsste, ergäbe sich damit nach den Wettbewerbskriterien eine Verschlechterung gegenüber der bisherigen Lösung. Die optimalen Lösungen der drei Aufgaben A[28,0], A[28,5] und A[29,0] stimmen deshalb mit denen der vorangegangenen Aufgabe A[27,5] überein.

### **A[29,5]**

Auch der 30. weiße Zug besucht kein neues Feld. Es ergibt sich aber nun eine neue Möglichkeit, nach f7-f5 den schwarzen f-Bauern zu beseitigen. Indem wir zunächst die beiden Züge Dd1-g4 und h4-h5 in der Lösung durch Ld3-e2-h5 ersetzen und dann weiterhin die beiden Freizüge e4-e5-f6 gegen die

beiden Freizüge Lh5-g4-f5 austauschen, können wir den sBf5 schlagen, ohne dass der Bauernzug f7-f5 im Partieverlauf zwangsläufig unmittelbar vor dem Schlag stattfinden muss. Wir können diesen Bauernzug, der immerhin zwei Felder verliert, damit weiter vorn im Partieverlauf unterbringen und die Lösung dadurch verbessern. Da der wL von d3 aus weiterzieht, können wir in der Anfangsphase wieder das Schema nutzen, das schon für die Lösung der Aufgaben A[13,5] bis A[22,0] angewendet wurde. Es ergibt sich 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. Sc3 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 f5 13. Sd2 Dh2+ 14. Kxh2 Sa5 15. e5 c4 16. Te3 h6 17. Dg4 Tf6 18. Dh3 Se7 19. Lg4 Thf8 20. Lxf5 Sxf5 21. Te1 Sg7 (21,0 Züge). Bei Schwarz sind die drei Züge Nr. 10-12 beliebig vertauschbar (6 Möglichkeiten) und ebenso die vier Züge Nr. 14-17 (24 Möglichkeiten). Bei Weiß ist die Reihenfolge der sechs Züge Nr. 8-13 beliebig, mit der einzigen Bedingung, dass a2-a3 vor Ta1-a2 geschehen muss (360 Möglichkeiten). Die letzten sieben Züge von Weiß (Züge Nr. 15-21) sind ausnahmslos Freizüge. Weiß muss darin die beiden Züge Lh5-g4 und Lg4xf5 unterbringen (in dieser Reihenfolge), und der letztere Zug Lg4xf5 muss spätestens im 20. Zug erfolgen. Die verbleibenden fünf Züge sind reine Abwartezüge. In Frage kommen dafür ein oder sogar zwei Pendelmanöver Lg4-f3-g4, beliebig viele Pendel des Te1 zwischen e1 und e3 (Te1-e3-e1) sowie weiterhin die Züge Dd1-g4-h3, Sd2-f1, e4-e5xf6 und h4-h5. Im Fall von e5xf6 ist das Schlagopfer auf f6 dabei der sT, der den Zug Tf8-f6 ausgeführt hat. Es bestehen die folgenden Abhängigkeiten:

- Falls ein oder zwei Pendel Lg4-f3-g4 stattfinden, so muss zuvor auf jeden Fall Lh5-g4 geschehen und am Ende Lg4xf5. Der Zug Lh5-g4 ist also immer der erste Zug des wL in der siebenzügigen Schlussphase der Partie, und der Zug Lg4xf5 ist immer der letzte Zug des wL. Er erfolgt spätestens im 20. Zug.
- Wenn die wD genau einmal zieht (Dd1-g4), so ist dieser Zug nur nach Absolvierung sämtlicher Läuferzüge möglich, also erst nach Lg4xf5. Wenn die wD zweimal zieht (Dd1-g4-h3), so müssen entweder beide Damenzüge vor Lh5-g4 gespielt werden oder beide nach Lg4xf5.
- Der Bauernzug h4-h5 ist erst nach dem Läuferzug Lh5-g4 möglich.
- Wenn der Be5 zweimal zieht, so muss er im zweiten Zug auf f6 den sT schlagen. Dies geschieht natürlich frühestens im 16. Zug. Falls der Schlag im 16. Zug erfolgt, so muss Schwarz zuvor entweder im 14. oder im 15. Zug Tf8-f6 gezogen haben. Von den 24 Kombinationen der vier schwarzen Züge Nr. 14-17 bleiben dann nur zwölf übrig. Falls der Schlag im 17. Zug erfolgt, so muss Tf8-f6 im 14.-16. Zug gespielt werden, und dann gibt es 18 Kombinationen für die vier schwarzen Züge Nr. 14-17. Da wir in der weiteren Darstellung nur die weißen Zugkombinationen abzählen wollen und dann am Ende schließlich mit den Kombinationen der übrigen Freiheitsgrade der Partie multiplizieren werden (insbesondere mit dem Faktor 24 für die vier schwarzen Züge Nr. 14-17), müssen wir nun jede Variante, in der der Zug 16. e5xf6 vorkommt, mit dem Faktor 1/2 gewichten, und ebenso jede Variante, in der der Zug 17. e5xf6 vorkommt, mit dem Faktor 3/4.
- Es bestehen keine weiteren Abhängigkeiten. Insbesondere sind die Turmzüge Te1-e3-e1 (ggf. mehrfach) und der Springerzug Sd2-f1 jederzeit spielbar, und dies trifft auch auf den Bauernzug e4-e5 zu.

Jetzt können wir die Anzahl der Varianten für die sieben weißen Züge in der Schlussphase der Partie bestimmen. Wir unterscheiden in der nachfolgenden Tabelle nach der Anzahl der Züge, die jeder einzelne der sechs beteiligten weißen Steine ausführt. Die Varianten werden jeweils absteigend nach der Zügezahl von Lh5, Dd1, Be4, Bh4, Sd2, Te1 sortiert. Falls es innerhalb einer Tabellenzeile erforderlich ist, in der Rechnung noch mehrere Fälle getrennt zu betrachten (in der Tabelle zu erkennen als Summanden einer Summe), so werden diese Fälle in der folgenden Reihenfolge abgehandelt:

- 1.) (nur falls Be4 zweimal zieht) – Position des Schlags e5xf6 in der Zugreihenfolge (16. Zug, 17. Zug, 18.-20. Zug, 21. Zug)
- 2.) (nur falls Dd1 zweimal zieht) – Reihenfolge der D- und L-Züge (zuerst D vor L, dann L vor D)
- 3.) (nur falls Bh4 zieht) – Position des ersten Läuferzugs Lh5-g4 in der Zugreihenfolge

Lh5	Dd1	Be4	Bh4	Sd2	Te1	Rechnung	Anzahl Verläufe
6	1	-	-	-	-	-	1
6	-	1	-	-	-	-	1
6	-	-	1	-	-	-	1
6	-	-	-	1	-	-	1
6	-	-	-	-	1	-	1
4	2	1	-	-	-	1 + 7	8
4	2	-	1	-	-	1 + 6	7
4	2	-	-	1	-	s.o.	8
4	2	-	-	-	1	s.o.	8
4	1	2	-	-	-	$(1/2) + 2*(3/4) + 18$	20
4	1	1	1	-	-	$15*2 + 5$	35
4	1	1	-	1	-	$21 * 2$	42
4	1	1	-	-	1	s.o.	42
4	1	-	1	1	-	s.o.	35
4	1	-	1	-	1	s.o.	35
4	1	-	-	1	1	s.o.	42
4	1	-	-	-	2	-	21
4	-	2	1	-	-	$(1/2) + 2*(3/4) + 12 + 6*4$	38
4	-	2	-	1	-	$(1/2) + 2*(3/4) + 12 + 6*5$	44
4	-	2	-	-	1	s.o.	44
4	-	1	1	1	-	$10*6 + 4*4 + 2$	78
4	-	1	1	-	1	s.o.	78
4	-	1	-	1	1	$15 * 6$	90
4	-	1	-	-	2	$15 * 3$	45
4	-	-	1	1	1	s.o.	78
4	-	-	1	-	2	$10*3 + 4*2 + 1$	39
4	-	-	-	1	2	s.o.	45
4	-	-	-	-	3	-	15
2	2	2	1	-	-	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*(1+4) + 6*(2+4)$	106
2	2	2	-	1	-	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*(1+5) + 6*(5+5)$	144
2	2	2	-	-	1	s.o.	144
2	2	1	1	1	-	$(3*6 + 3*2*4 + 6*2) + (20*6 + 10*4 + 4*2)$	222
2	2	1	1	-	1	s.o.	222
2	2	1	-	1	1	$(15 + 35) * 6$	300
2	2	1	-	-	2	$(15 + 35) * 3$	150
2	2	-	1	1	1	s.o.	222
2	2	-	1	-	2	$(3*3 + 3*2*2 + 6) + (20*3 + 10*2 + 4)$	111
2	2	-	-	1	2	s.o.	150
2	2	-	-	-	3	$15 + 35$	50
2	1	2	1	1	-	$((1/2) + 2*(3/4) + 18)*(6*2+3)$	300
2	1	2	1	-	1	s.o.	300
2	1	2	-	1	1	$((1/2) + 2*(3/4) + 18)*10*2$	400

2	1	2	-	-	2	$((1/2) + 2*(3/4) + 18)*10$	200
2	1	1	1	1	1	$15*24 + 10*18 + 6*12 + 3*6$	630
2	1	1	1	-	2	$15*12 + 10*9 + 6*6 + 3*3$	315
2	1	1	-	1	2	$35 * 12$	420
2	1	1	-	-	3	$35 * 4$	140
2	1	-	1	1	2	s.o.	315
2	1	-	1	-	3	$15*4 + 10*3 + 6*2 + 3$	105
2	1	-	-	1	3	s.o.	140
2	1	-	-	-	4	-	35
2	-	2	1	1	1	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*(3*6+2*4+2) + 6*(4*6+3*4+2*2)$	632
2	-	2	1	-	2	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*(3*3+2*2+1) + 6*(4*3+3*2+2)$	316
2	-	2	-	1	2	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*6*3 + 6*10*3$	432
2	-	2	-	-	3	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*6 + 6*10$	144
2	-	1	1	1	2	$5*60 + 4*48 + 3*36 + 2*24 + 12$	660
2	-	1	1	-	3	$5*20 + 4*16 + 3*12 + 2*8 + 4$	220
2	-	1	-	1	3	$15 * 20$	300
2	-	1	-	-	4	$15 * 5$	75
2	-	-	1	1	3	s.o.	220
2	-	-	1	-	4	$5*5 + 4*4 + 3*3 + 2*2 + 1$	55
2	-	-	-	1	4	s.o.	75
2	-	-	-	-	5	-	15

Als Gesamtzahl der Verläufe der Schlussphase erhalten wir damit 9.167, und für die Anzahl der optimalen Lösungen ergibt sich insgesamt 475.217.280.

Für die Ermittlung der verschiedenen Schlussstellungen ist zunächst festzustellen, dass man anhand der Schlussstellung jeweils erkennen kann, welche der sechs Züge Dd1-g4-h3, e4-e5xf6, h4-h5 und Sd2-f1 gespielt wurden und welche nicht. Jede mögliche Kombination dieser sechs Züge führt zu einer anderen Schlussstellung. Insbesondere ist anhand der Schlussstellung dann auch die Gesamtzahl der Züge bekannt, die die vier Steine Dd1, Be4, Bh4, Sd2 in der Schlussphase verbrauchen. Die übrigen Züge (die Differenz zu 7) entfallen auf Lh5 und Te1. Da die Zahl der Züge des Lh5 stets gerade ist, liegt somit auch anhand der Schlussstellung fest, ob der Te1 eine gerade oder eine ungerade Zahl von Zügen ausgeführt hat. Wenn die Zahl gerade ist, steht der Turm am Ende auf e1, und wenn die Zahl ungerade ist, steht er auf e3. Der Lh5 wird auf f5 geschlagen und steht am Ende nicht mehr auf dem Brett. Also ist die Schlussstellung durch die Kombination der Züge der vier Steine Dd1, Be4, Bh4, Sd2 bereits eindeutig festgelegt, und wir brauchen nur noch diese Kombinationen abzuzählen. Die vier Steine ziehen zusammen höchstens fünfmal, weil zwei Züge für den Lh5 übrig bleiben müssen.

- Wenn die vier Steine überhaupt nicht ziehen, ist die Schlussstellung eindeutig.
- Wenn die vier Steine genau einmal ziehen, gibt es vier Möglichkeiten.
- Wenn die vier Steine genau zweimal ziehen, gibt es zwei Fälle:
  - o Falls ein Stein zwei Züge macht, gibt es zwei Möglichkeiten.
  - o Falls zwei verschiedene Steine ziehen, gibt es sechs Möglichkeiten.
- Wenn die vier Steine genau dreimal ziehen, gibt es wieder zwei Fälle:
  - o Falls ein Stein zwei Züge macht, gibt es sechs Möglichkeiten.
  - o Falls drei verschiedene Steine ziehen, gibt es vier Möglichkeiten.
- Wenn die vier Steine genau viermal ziehen, gibt es drei Fälle:

- Falls zwei Steine je zweimal ziehen, ist die Schlussstellung eindeutig.
- Falls genau ein Stein zweimal zieht, gibt es sechs Möglichkeiten.
- Falls vier verschiedene Steine ziehen, ist die Schlussstellung eindeutig.
- Wenn die vier Steine fünfmal ziehen, gibt es zwei Fälle:
  - Falls zwei Steine je zweimal ziehen, gibt es zwei Möglichkeiten.
  - Falls nur ein Stein zweimal zieht, gibt es zwei Möglichkeiten.

Insgesamt erhalten wir damit 35 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 14. Zug von Weiß erreicht.

### A[30,0]

Der 30. schwarze Zug besucht kein neues Feld und spielt für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle. Gegenüber der vorangegangenen Aufgabe A[29,5] ändert sich nichts.

### A[30,5]

Der 31. weiße Zug Sf1-e3 kann die Lösung der Aufgabenstellung nicht verbessern, aber er kann in der Schlussphase der Lösung als Abwartezug auftreten und schafft damit zusätzliche Möglichkeiten für optimale Lösungen. In Ergänzung zu der Tabelle aus A[29,5] wollen wir nun also die Schlussphasen bestimmen, in denen der Sd2 zweimal zieht: Sd2-f1-e3. Das Feld e3 steht damit in der Schlussstellung für den Te1 nicht mehr zur Verfügung, so dass der wT nur eine gerade Anzahl von Zügen ausführen kann. Außerdem muss der Zug Sf1-e3 nach dem letzten Turmzug gespielt werden. Ansonsten lässt sich die nachfolgende Tabelle nach den gleichen Kriterien aufbauen und befüllen wie oben unter A[29,5].

Lh5	Dd1	Be4	Bh4	Sd2	Te1	Rechnung	Anzahl Verläufe
4	1	-	-	2	-	-	21
4	-	1	-	2	-	$15 * 3$	45
4	-	-	1	2	-	$10*3 + 4*2 + 1$	39
2	2	1	-	2	-	$(15 + 35) * 3$	150
2	2	-	1	2	-	$(3*3 + 3*2*2 + 6) + (20*3 + 10*2 + 4)$	111
2	1	2	-	2	-	$((1/2) + 2*(3/4) + 18) * 10$	200
2	1	1	1	2	-	$15*12 + 10*9 + 6*6 + 3*3$	315
2	1	-	-	2	2	$35 * 3$	105
2	-	2	1	2	-	$((1/2) + 2*(3/4) + 12)*(3*3 + 2*2 + 1) + 6*(4*3 + 3*2 + 2)$	316
2	-	1	-	2	2	$15 * 5 * 3$	225
2	-	-	1	2	2	$(5*5 + 4*4 + 3*3 + 2*2 + 1) * 3$	165

Die Anzahl der Verläufe der Schlussphase erhöht sich damit um 1.692 auf 10.859. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen beträgt 562.930.560.

Die zusätzlichen Schlussstellungen beinhalten alle Se3 und Te1, sie unterscheiden sich damit untereinander nur in der Position von Dd1, Be4 und Bh4. Diese drei Steine ziehen zusammen höchstens dreimal. Da Lh5, Sd2 und Te1 alle eine gerade Anzahl von Zügen ausführen, muss außerdem die Gesamtzahl der Züge von Dd1, Be4 und Bh4 ungerade sein; sie beträgt also entweder 1 oder 3.

- Wenn die drei Steine genau einmal ziehen, so gibt es dafür drei Möglichkeiten.
- Wenn die drei Steine genau dreimal ziehen, so sind zwei Fälle zu unterscheiden:
  - o Falls ein Stein zweimal zieht, so gibt es vier Kombinationen.
  - o Falls kein Stein zweimal zieht, so ist die Schlussstellung eindeutig.

Insgesamt haben wir durch den Zug Sf1-e3 damit acht zusätzliche Schlussstellungen gewonnen. Die Gesamtzahl der Schlussstellungen erhöht sich auf 43. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 14. Zug von Weiß erreicht.

### A[31,0]

Der 31. schwarze Zug besucht kein neues Feld und spielt für die Lösung der Aufgabenstellung keine Rolle. Gegenüber der vorangegangenen Aufgabe A[30,5] ändert sich nichts.

### A[31,5]

Der 32. weiße Zug Lc1-e3 kann die Lösung der Aufgabenstellung nicht verbessern. Er erhöht aber weiter die Anzahl der optimalen Lösungen – und dies sogar auf zwei verschiedenen Wegen: Einerseits kann der Zug Lc1-e3 in der Schlussphase der bereits bekannten Lösung als Abwartezug verwendet werden; und andererseits ist es auch möglich, den Zug Lc1-e3 an Stelle von Sf3-d2 für den Besuch des Feldes d2 einzusetzen. In beiden Fällen müssen wir nun also wieder alle optimalen Lösungen abzählen. Allen Lösungen, die hier hinzukommen, ist gemeinsam, dass der wL in der Schlussstellung auf dem Feld e3 steht. Der Zug Sf1-e3 scheidet also aus, und der Te1 muss in der Schlussphase eine gerade Anzahl von Zügen ausführen und am Ende wieder auf e1 stehen. Alle Züge dieses Turms müssen in der Partie vor dem Zug Lc1-e3 stattfinden.

Wir wollen nun zunächst die Varianten zählen, in denen das Feld d2 weiterhin in einem der Züge Nr. 8-13 erstmalig durch Sf3-d2 besucht wird (wie in den bisher bekannten Lösungen). Damit in der Schlussphase nun Lc1-e3 als Abwartezug gespielt werden kann, muss zuvor Sd2-f1 geschehen. Der Sd2 zieht also genau einmal, und der Te1 macht eine gerade Anzahl von Zügen. Für den Zug Lc1-e3 bestehen damit exakt die gleichen Abhängigkeiten, wie sie auch für den Springerzug Sf1-e3 bestehen. Es ergeben sich nochmals die gleichen Fälle und Zahlen von Varianten wie vorher für Sf1-e3.

Lh5	Dd1	Be4	Bh4	Sd2	Lc1	Te1	Rechnung	Anzahl Verläufe
4	1	-	-	1	1	-	s.o.	21
4	-	1	-	1	1	-	s.o.	45
4	-	-	1	1	1	-	s.o.	39
2	2	1	-	1	1	-	s.o.	150
2	2	-	1	1	1	-	s.o.	111
2	1	2	-	1	1	-	s.o.	200
2	1	1	1	1	1	-	s.o.	315
2	1	-	-	1	1	2	s.o.	105
2	-	2	1	1	1	-	s.o.	316
2	-	1	-	1	1	2	s.o.	225
2	-	-	1	1	1	2	s.o.	165

Zusammen führt dies auf 1.692 zusätzliche Schlussphasen (87.713.280 zusätzliche optimale Lösungen) mit acht verschiedenen Schlussstellungen. Diesen acht Stellungen sind wLe3, wSf1, wTe1 und sBg5 gemeinsam. Sie unterscheiden sich untereinander in den Positionen der drei Steine Dd1, Be4, Bh4, die zusammen in der Schlussphase entweder genau einen oder genau drei Züge machen.

Jetzt wenden wir uns den Varianten zu, in denen das Feld d2 im Lösungsverlauf erstmalig durch den Zug Lc1-e3 besucht wird. Hierbei ist zunächst zu beachten, dass es für die sechs weißen Züge Nr. 8-13 weniger Kombinationen gibt als bisher. Weil d2-d4 vor Lc1-e3 stattfinden muss, haben wir es diesmal nur mit 180 statt 360 Möglichkeiten für die sechs weißen Züge zu tun. In der siebenzügigen Schlussphase bleibt der wL unbeweglich auf dem Feld e3 stehen, so dass weder Le3 noch Te1 ziehen können. Die sieben letzten weißen Züge müssen deshalb von den fünf Steinen Lh5, Dd1, Be4, Bh4, Sf3 absolviert werden. Die Zugmöglichkeiten von Lh5, Dd1, Be4 und Bh4 entsprechen dabei denen, die wir schon kennen. Der Sf3 zieht höchstens fünfmal. Wenn er sich überhaupt bewegt, gibt es dabei für jede mögliche Zügezahl (1, 2, 3, 4, 5) genau zwei mögliche Wege des Springers:

- Wenn Sf3 genau einmal zieht, lautet der Zug Sf3-g5 oder Sf3-d2.
- Wenn Sf3 genau zweimal zieht, lauten seine Züge Sf3-g5-f3 oder Sf3-d2-f1.
- Wenn Sf3 genau dreimal zieht, muss er mit den beiden Zügen Sf3-g5-f3 starten. Der dritte Zug lautet wieder entweder Sf3-g5 oder Sf3-d2.
- Wenn Sf3 genau viermal zieht, startet er ebenfalls mit Sf3-g5-f3, und es schließt sich entweder nochmals Sf3-g5-f3 oder Sf3-d2-f1 an.
- Wenn Sf3 genau fünfmal zieht, beginnt er mit dem zweifachen Pendel Sf3-g5-f3-g5-f3, und es schließt sich entweder Sf3-g5 oder Sf3-d2 an.

Da sowohl der Läuferzug Lg4-f3 als auch der Damenzug Dd1-g4 das Feld f3 benötigen, bestehen Abhängigkeiten zwischen den Manövern der drei Figuren Sf3, Lh5, Dd1. Hier sind die folgenden Feststellungen zu treffen:

- Der Lh5 kann nicht sechsmal ziehen. Dazu wäre nämlich in den ersten sechs Zügen der Schlussphase (Nr. 15-20) die Zugfolge Lh5-g4-f3-g4-f3-g4-f5 erforderlich, doch diese wird durch den Sf3 verhindert. Der Lh5 zieht also entweder zweimal oder viermal.
- Wenn Lh5 viermal zieht und Dd1 zweimal, so müssen die beiden Damenzüge im Partieverlauf nach den vier Läuferzügen stattfinden. Denn sonst müssten wir in den Zügen Nr. 15-20 die Zugfolge Dd1-g4-h3, Lh5-g4-f3-g4-f5 unterbringen, und auch dafür steht der Sf3 im Weg. Wenn der Lh5 viermal zieht, müssen also sämtliche eventuellen Damenzüge nach Lh5-g4-f3-g4-f5 geschehen.
- Wenn Lh5 viermal zieht, so muss der Sf3 vor dem zweiten Läuferzug Lg4-f3 das Feld f3 verlassen. Der Sf3 zieht dann also mindestens einmal, außerdem natürlich höchstens dreimal. Genauer gilt:
  - o Wenn Sf3 genau einmal zieht, so kann der Springerzug (Sf3-g5 oder Sf3-d2) in der Reihenfolge der vier Läuferzüge an genau zwei Positionen eingereicht werden – vor dem ersten oder vor dem zweiten Läuferzug.
  - o Wenn Sf3 genau zweimal zieht, so muss der erste der beiden Züge wieder vor dem zweiten (oder schon dem ersten) Läuferzug erfolgen. Im Fall von Sf3-d2-f1 kann der zweite Springerzug dann beliebig eingereicht werden, aber im Fall von Sf3-g5-f3 darf der zweite Springerzug erst nach dem dritten Läuferzug Lf3-g4 erfolgen.
  - o Wenn Sf3 dreimal zieht, so lautet der erste Zug Sf3-g5, und dieser muss wieder vor Lg4-f3 geschehen. Der zweite Springerzug Sg5-f3 kann nun nicht vor Lg4-f3 geschehen, denn dann bräuchten wir auch noch den dritten Springerzug vor Lg4-f3, und dann könnte der wL erst im siebten (d.h. im 21.) Zug nach f5 gelangen – zu spät. Der Zug Sg5-f3 ist also

erst nach Lf3-g4 möglich. Der dritte Springerzug (Sf3-g5 oder Sf3-d2) kann dann beliebig eingereicht werden.

- Wenn Lh5 nur zweimal zieht, besteht keine Abhängigkeit zwischen den Manövern von Lh5 und Sf3. Doch jetzt sind andererseits die Züge der Dame zu beachten. Wenn Dd1 sich überhaupt bewegt, muss bereits vor dem ersten Damenzug Dd1-g4 der erste Springerzug erfolgen. Außerdem darf der Sf3 vor Dd1-g4 nicht nur genau die zwei Züge Sf3-g5-f3 oder die vier Züge Sf3-g5-f3-g5-f3 machen. Der Sf3 zieht vor Dd1-g4 also entweder genau einmal (zwei Möglichkeiten) oder genau zweimal (dann notwendig Sf3-d2-f1) oder genau dreimal (zwei Möglichkeiten) oder genau viermal (dann notwendig Sf3-g5-f3-d2-f1). Nach Dd1-g4 sind beliebige weitere Springerzüge möglich.
- Es folgt, dass in jedem Fall mindestens ein Springerzug erforderlich ist. Denn wenn der Springer auf f3 stehen bliebe, könnte auch die Dame nicht ziehen, und der Läufer hätte nur zwei Züge. Mit LBB könnten dann insgesamt höchstens fünf Züge stattfinden, wo aber sieben benötigt werden.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nun wieder eine Tabelle der möglichen Kombinationen der Zügezahlen aufbauen. Weil es diesmal in vielen Fällen nicht leicht ist, den Überblick zu behalten, sind unterhalb der Tabelle einige ergänzende Stichworte zur Rechnung notiert. Um dabei auf die einzelnen Tabellenzeilen Bezug nehmen zu können, werden diese durchnummeriert.

Lfd. Nr.	Lh5	Dd1	Be4	Bh4	Sf3	Rechnung	Anzahl Verläufe
1	4	2	-	-	1	$2 * 2$	4
2	4	1	1	-	1	$2 * 7 * 2$	28
3	4	1	-	1	1	$2 * (6+5)$	22
4	4	1	-	-	2	$6 + 5 + 2*3$	17
5	4	-	2	-	1	$2 * 6 * 2$	24
6	4	-	1	1	1	$2 * (5 + 4 + 6*2)$	42
7	4	-	1	-	2	$2*6*2 + 5 + 4 + 2*2$	37
8	4	-	-	1	2	$2*(5+4) + 5 + 4 + 2*2$	31
9	4	-	-	-	3	$2 * 2 * 2$	8
10	2	2	2	-	1	$2 * (6 + ((1/2)+2*(3/4)+18)*3)$	132
11	2	2	1	1	1	$2 * (2 + 6 + 7*(5*2+4))$	212
12	2	2	1	-	2	$5 + 6 + 7*(5+4+3) + 4 + 6 + 7*3*2$	147
13	2	2	-	1	2	$5+2+6*(4+3)+5*4+4+4+2+6*2*2+5*2$	113
14	2	2	-	-	3	$2 * (4 + 3*3 + 10)$	46
15	2	1	2	1	1	$2 * ((1/2)+2*(3/4)+18) * (4*2+3)$	440
16	2	1	2	-	2	$((1/2)+2*(3/4)+18) * (4+3+2+3)$	240
17	2	1	1	1	2	$7 * (5*(3+2) + 4*3 + 3 + 5*2 + 4)$	378
18	2	1	1	-	3	$2 * 7 * (3+10)$	182
19	2	1	-	1	3	$2 * (6*2 + 5 + 6*4 + 5*3 + 4*2 + 3)$	134
20	2	1	-	-	4	$2*3 + 2*10 + 15$	41
21	2	-	2	1	2	$2 * (6*10*2+((1/2)+2*(3/4)+12)*(6+4*2))$	632
22	2	-	2	-	3	$2 * (6*10 + ((1/2)+2*(3/4)+12)*6)$	288
23	2	-	1	1	3	$2 * (20*2 + 6*10 + 6*10*2)$	440
24	2	-	1	-	4	$2 * 15 * 5$	150
25	2	-	-	1	4	$2 * (15 + 20*2)$	110
26	2	-	-	-	5	$2 * 15$	30

Nr. 1: Auswahl zwischen zwei S-Zugmöglichkeiten (Sg5, Sd2); letzte fünf Züge stehen fest (LLDD); Reihenfolge der ersten beiden Züge (Lg4 und S~) beliebig

Nr. 2: Auswahl 2xS; beliebige Position des Zugs e5 (sieben Möglichkeiten); von den verbleibenden sechs Zügen stehen die letzten fünf fest (LLDD); Reihenfolge zwischen Lg4 und S~ beliebig

Nr. 3: Auswahl 2xS; nach Lh5-g4 kommen noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach Nummer dieses Zugs:

- wenn 15. Lg4, dann sechs Positionen für den Zug h5; Reihenfolge der übrigen fünf Züge steht fest (SLLD)
- wenn 16. Lg4, dann 15. S~; fünf Positionen für h5; Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (LLD)

Nr. 4: zwei mögliche S-Manöver (Sf3-d2-f1 und Sf3-g5-f3); Fallunterscheidung nach diesen beiden Manövern:

- wenn Sf3-d2-f1, dann kommen nach dem ersten S-Zug (Sd2) noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach der Nummer des ersten S-Zuges:
  - o wenn 15. Sd2, dann sechs Positionen für Sf1; Reihenfolge der übrigen fünf Züge steht fest (LLLD)
  - o wenn 16. Sd2, dann 15. Lg4; fünf Positionen für Sf1; Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (LLD)
- wenn Sf3-g5-f3, dann kommen vor Lg4-f3-g4 zwei Züge und danach noch drei, deshalb notwendig 17. Lf3 und 18. Lg4; Reihenfolge der ersten beiden Züge (Lg4 und Sg5) beliebig; drei Positionen für Sg5-f3; Reihenfolge der verbleibenden Züge (Lxf5, Dg4) steht dann fest

Nr. 5: Auswahl 2xS; im letzten (21.) Zug nur exf6 möglich; sechs Möglichkeiten für die Position des Zuges e5; von den verbleibenden fünf Zügen stehen die letzten drei fest (LLL); beliebige Reihenfolge der übrigen beiden Züge (Lg4, S~)

Nr. 6: Auswahl 2xS; der letzte (21.) Zug ist e5 oder h5; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:

- wenn 21. e5, dann kommen nach Lh5-g4 noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach der Nummer dieses Zuges:
  - o wenn 15. Lg4, dann fünf Positionen für h5; Reihenfolge der verbleibenden vier Züge steht fest (SLLL)
  - o wenn 16. Lg4, dann 15. S~; vier Positionen für h5; Reihenfolge der verbleibenden drei Züge steht fest (LLL)
- wenn 21. h5, dann sechs Positionen für e5; unter den verbleibenden fünf Zügen stehen die letzten drei fest (LLL); Reihenfolge der beiden Züge Lh5-g4 und S~ beliebig

Nr. 7: zwei mögliche S-Manöver; letzter Zug ist entweder der zweite S-Zug oder e5; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:

- wenn 21. S~: Auswahl zwei S-Manöver; sechs Positionen für e5; unter den verbleibenden fünf Zügen stehen die drei letzten fest (LLL); beliebige Reihenfolge der übrigen beiden Züge (Lg4, S~)
- wenn 21. e5: Fallunterscheidung nach den beiden S-Manövern:
  - o wenn Sf3-d2-f1: nach dem ersten S-Zug kommen noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach der Nummer des ersten S-Zuges:
    - wenn 15. Sd2: fünf Positionen für zweiten S-Zug; Rest steht fest (LLLL)
    - wenn 16. Sd2: dann 15. Lg4; vier Positionen für zweiten S-Zug; Rest steht fest (LLL)

- wenn Sf3-g5-f3: vor Lg4-f3-g4 kommen zwei Züge und danach noch drei, deshalb notwendig 17. Lf3 und 18. Lg4; Reihenfolge der ersten beiden Züge (Lh5-g4 und Sg5) beliebig; Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge (Lxf5 und Sf3) ebenfalls beliebig

Nr. 8: zwei mögliche S-Manöver; letzter Zug ist entweder der zweite S-Zug oder h5; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:

- wenn 21. S~: Auswahl zwei S-Manöver; nach Lh5-g4 kommen noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach der Nummer des Zuges Lh5-g4:
  - wenn 15. Lg4: fünf Positionen für h5; Rest steht fest (SLLL)
  - wenn 16: Lg4: dann 15. S~; vier Positionen für h5; Rest steht fest (LLL)
- wenn 21. h5: gleiches Ergebnis wie oben unter Nr. 7 im Fall 21. e5

Nr. 9: die ersten beiden S-Züge sind Sf3-g5-f3; Auswahl zwischen zwei Möglichkeiten im dritten S-Zug; der 21. Zug muss der letzte S-Zug sein; vor Lg4-f3-g4 kommen zwei Züge und danach noch drei, deshalb notwendig 17. Lf3 und 18. Lg4; Reihenfolge der ersten beiden Züge (Lh5-g4 und Sg5) beliebig; Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge (Lxf5 und Sf3) ebenfalls beliebig

Nr. 10: Auswahl 2xS; Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:

- wenn D vor L, dann muss exf6 der letzte Zug sein; sechs Positionen für e5 in den ersten sechs Zügen; die Reihenfolge der verbleibenden fünf Züge steht fest (SDDL)
- wenn L vor D, dann 21 Kombinationen für die Positionen der beiden Bauernzüge e5 und exf6, wobei (wie bereits bekannt und gewohnt) eine Kombination mit dem Gewicht 1/2 versehen werden muss und zwei weiteren Kombinationen mit dem Gewicht 3/4; von den verbleibenden fünf Zügen sind die beiden letzten die Damenzüge; unter den verbleibenden drei Zügen beliebige Position des Springerzugs; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht dann fest (LL)

Nr. 11: Auswahl 2xS; Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:

- wenn D vor L, dann letzter Zug entweder e5 oder h5; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:
  - wenn 21. e5, dann sind die ersten vier Züge SDDL; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und h5
  - wenn 21. h5, dann sechs Positionen für e5 in den ersten sechs Zügen; Reihenfolge der verbleibenden fünf Züge steht fest (SDDL)
- wenn L vor D, dann sieben Positionen für den Zug e5; unter den verbleibenden sechs Zügen folgen nach Lg4 noch mindestens vier Züge; Fallunterscheidung nach der Position dieses Zuges innerhalb der sechs Züge:
  - wenn Lg4 der erste der sechs Züge ist, dann fünf Positionen für h5 unter den verbleibenden fünf Zügen; unter den verbleibenden vier Zügen sind die beiden Damenzüge die letzten; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und S~
  - wenn Lg4 der zweite der sechs Züge ist, dann kommt davor S~; vier Positionen für h5 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der drei übrigen Züge steht fest (LDD)

Nr. 12: zwei mögliche S-Manöver; Fallunterscheidung nach den beiden Manövern:

- wenn Sf3-d2-f1, dann Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:
  - wenn D vor L, dann ist der letzte Zug entweder e5 oder Sf1; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:
    - wenn 21. e5, dann notwendig 15. Sd2; fünf Positionen für Sf1 unter den fünf Zügen Nr. 16-20; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (DDL)

- wenn 21. Sf1, dann sechs Positionen für e5 unter den ersten sechs Zügen; die Reihenfolge der übrigen fünf Züge steht fest (SDDL)
  - wenn L vor D, dann sieben Positionen für e5; unter den verbleibenden sechs Zügen kommen nach Sd2 noch mindestens drei weitere; Fallunterscheidung nach der Position von Sd2 unter diesen sechs Zügen:
    - wenn Sd2 der erste der sechs Züge ist, dann fünf Positionen für Sf1 unter den verbleibenden fünf Zügen; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (LLDD)
    - wenn Sd2 der zweite der sechs Züge ist, dann muss davor Lg4 kommen; vier Positionen für Sf1 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (LDD)
    - wenn Sd2 der dritte der sechs Züge ist, dann muss davor Lg4 und Lxf5 kommen (in dieser Reihenfolge); drei Positionen für Sf1 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (DD)
- wenn Sf3-g5-f3, dann Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:
  - wenn D vor L, dann ist der letzte Zug entweder e5 oder Sf3; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:
    - wenn 21. e5, dann notwendig 15. Sg5, 16. Dg4; vier Positionen für Sf3 unter den vier Zügen Nr. 17-20; die Reihenfolge der drei übrigen Züge steht fest (DLL)
    - wenn 21. Sf3, dann sechs Positionen für e5 unter den ersten sechs Zügen; die Reihenfolge der übrigen fünf Züge steht fest (SDDL)
  - wenn L vor D, dann sieben Positionen für den Zug e5; unter den verbleibenden sechs Zügen kommen drei vor Dg4 und zwei danach, also ist Dg4 der vierte Zug unter den sechs Zügen; beliebige Reihenfolge der beiden letzten der sechs Züge (Dh3 und Sf3); unter den ersten drei der sechs Züge drei Positionen für Sg5; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht fest (LL)

Nr. 13: zwei mögliche S-Manöver; Fallunterscheidung nach den beiden Manövern:

- wenn Sf3-d2-f1, dann Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:
  - wenn D vor L, dann kann im 15. Zug nur Sd2 geschehen; der letzte (21.) Zug ist entweder h5 oder Sf1; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:
    - wenn 21. h5, dann fünf Positionen für Sf1 unter den fünf Zügen Nr 16-20; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (DDL)
    - wenn 21. Sf1, dann notwendig 16. Dg4, 17. Dh3, 18. Lg4; beliebige Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge (Lxf5 und h5)
  - wenn L vor D, dann kommen nach Lg4 noch mindestens vier Züge; Fallunterscheidung nach der Zugnummer dieses Zuges:
    - wenn 15. Lg4, dann sechs Positionen für h5 unter den Zügen Nr. 16-21; unter den verbleibenden fünf Zügen kommen nach Sd2 noch mindestens drei; Fallunterscheidung nach der Position von Sd2 unter den fünf Zügen:
      - wenn Sd2 der erste der fünf Züge ist, dann vier Positionen für Sf1 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der drei übrigen Züge steht fest (LDD)
      - wenn Sd2 der zweite der fünf Züge ist, dann notwendig davor Lxf5; drei Positionen für Sf1 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht fest (DD)

- wenn 16. Lg4, dann notwendig 15. Sd2; fünf Positionen für h5 unter den Zügen Nr. 17-21; vier Positionen für Sf1 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (LDD)
  - wenn 17. Lg4, dann notwendig 15. Sd2 und 16. Sf1; vier Positionen für h5 unter den Zügen Nr. 18-21; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (LDD)
- wenn Sf3-g5-f3, dann Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:
  - wenn D vor L, dann kann im 15. Zug nur Sd2 geschehen; der letzte (21.) Zug ist entweder h5 oder Sf3; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:
    - wenn 21. h5, dann notwendig 16. Dg4; vier Positionen für Sf3 unter den vier Zügen Nr. 17-20; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (DLL)
    - wenn 21. Sf3, dann notwendig 16. Dg4, 17. Dh3, 18. Lg4; beliebige Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge (Lxf5 und h5)
  - wenn L vor D, dann kommen nach Lg4 noch mindestens fünf Züge; Fallunterscheidung nach der Zugnummer dieses Zuges:
    - wenn 15. Lg4, dann sechs Positionen für h5 unter den Zügen Nr. 16-21; unter den verbleibenden fünf Zügen kommen vor Dg4 zwei Züge und danach auch noch zwei, also ist Dg4 der dritte der fünf Züge; beliebige Reihenfolge der beiden Züge davor (Lxf5 und Sg5); außerdem beliebige Reihenfolge der beiden Züge nach Dg4 (Dh3 und Sf3)
    - wenn 16. Lg4, dann notwendig 15. Sd2; fünf Positionen für h5 unter den Zügen Nr. 17-21; unter den verbleibenden vier Zügen sind Lxf5 und Dg4 die beiden ersten; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge (Dh3 und Sf3)

Nr. 14: die ersten beiden S-Züge sind Sf3-g5-f3; Auswahl zwischen zwei Möglichkeiten im dritten S-Zug; Fallunterscheidung nach der Reihenfolge der Züge von D und L:

- wenn D vor L, dann muss der 21. Zug der dritte Springerzug sein (Sd2 oder Sg5); der erste Springerzug Sg5 findet vor Dg4 statt und der zweite Springerzug Sf3 nach Dg4; die ersten beiden Züge stehen fest: 15. Sg5, 16. Dg4; vier Positionen für Sf3 unter den Zugnummern 17-20; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (DLL)
- wenn L vor D, dann muss vor Dg4 entweder genau ein Springerzug geschehen oder alle drei Springerzüge; Fallunterscheidung nach dieser Anzahl:
  - wenn vor Dg4 nur ein Springerzug, dann vor Dg4 drei Züge und nach Dg4 drei Züge, also notwendig 18. Dg4; drei Positionen für Sg5 unter den Zugnummern 15-17; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge mit den Zugnummern 15-17 steht fest (LL); ebenfalls drei Positionen für Dh3 unter den Zugnummern 19-21; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (SS)
  - wenn vor Dg4 alle drei Springerzüge, dann am Ende notwendig 20. Dg4 und 21. Dh3; in den fünf Zügen davor gibt es zehn Kombinationen für die Positionen der beiden L-Züge; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (SSS)

Nr. 15: Auswahl 2xS; die beiden Bauernzüge e5 und exf6 können auf 21 Arten auf die sieben Zugnummern verteilt werden, wobei einmal mit dem Faktor 1/2 zu gewichten ist und zweimal mit 3/4; insgesamt deshalb Faktor  $(1/2)+2*(3/4)+18$ ; unter den verbleibenden fünf Zügen kommen nach Lg4 noch mindestens drei; Fallunterscheidung nach der Position von Lg4 innerhalb der fünf Züge:

- wenn Lg4 der erste der fünf Züge ist, dann vier mögliche Positionen für h5 in den verbleibenden vier Zügen; unter den verbleibenden drei Zügen ist Dg4 der letzte; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und S~

- wenn Lg4 der zweite der fünf Züge ist, dann davor notwendig S~; drei mögliche Positionen für h5 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht fest (LD)

Nr. 16: zwei mögliche Springermanöver (Sf3-d2-f1, Sf3-g5-f3); für Verteilung der beiden Bauernzüge e5 und exf6 wieder (wie vorher) Faktor  $(1/2)+2*(3/4)+18$ ; für die verbleibenden fünf Züge Fallunterscheidung nach den beiden Springermanövern:

- wenn Sf3-d2-f1, dann kommen unter den fünf Zügen nach Sd2 noch mindestens zwei weitere; Fallunterscheidung nach der Position von Sd2 unter den fünf Zügen:
  - o wenn Sd2 der erste der fünf Züge ist, dann vier mögliche Positionen für Sf1 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (LLD)
  - o wenn Sd2 der zweite der fünf Züge ist, dann notwendig davor Lg4; drei mögliche Positionen für Sf1 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LD)
  - o wenn Sd2 der dritte der fünf Züge ist, dann notwendig davor Lg4 und Lxf5 (in dieser Reihenfolge); beliebige Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge (Dg4 und Sf1)
- wenn Sf3-g5-f3, dann sind die letzten beiden der fünf noch offenen Züge notwendig Dg4 und Sf3 (in dieser Reihenfolge); drei Positionen für Sg5 unter den ersten drei der fünf Züge; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LL)

Nr. 17: zwei mögliche Springermanöver (Sf3-d2-f1, Sf3-g5-f3); für den Bauernzug e5 gibt es sieben mögliche Positionen; Fallunterscheidung nach den beiden Springermanövern:

- wenn Sf3-d2-f1, dann kommen innerhalb der sechs noch offenen Züge nach Lg4 noch mindestens drei; Fallunterscheidung nach der Position von Lg4 innerhalb der sechs Züge:
  - o wenn Lg4 der erste der sechs Züge ist, dann fünf Positionen für h5 unter den verbleibenden fünf Zügen; unter den verbleibenden vier Zügen kommen nach Sd2 noch mindestens zwei; Fallunterscheidung nach der Position von Sd2 unter den vier noch offenen Zügen:
    - wenn Sd2 der erste der vier Züge ist, dann drei Positionen für Sf1 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LD)
    - wenn Sd2 der zweite der vier Züge ist, dann davor notwendig Lxf5; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Dg4 und Sf1
  - o wenn Lg4 der zweite der sechs Züge ist, dann vorher notwendig Sd2; vier Positionen für h5 unter den verbleibenden vier Zügen; drei Positionen für Sf1 unter den verbleibenden drei Zügen; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LD)
  - o wenn Lg4 der dritte der sechs Züge ist, dann vorher notwendig Sd2 und Sf1 (in dieser Reihenfolge); drei Positionen für h5 unter den drei verbleibenden Zügen; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LD)
- wenn Sf3-g5-f3, dann kommen innerhalb der sechs offenen Züge nach Lg4 noch mindestens vier; Fallunterscheidung nach der Position von Lg4 innerhalb der sechs Züge:
  - o wenn Lg4 der erste der sechs Züge ist, dann fünf Positionen für h5 unter den verbleibenden fünf Zügen; unter den verbleibenden vier Zügen sind Dg4 und Sf3 die beiden letzten (in dieser Reihenfolge); beliebige Reihenfolge der übrigen beiden Züge Lxf5 und Sg5
  - o wenn Lg4 der zweite der sechs Züge ist, dann vorher notwendig Sg5; vier Positionen für h5 unter den verbleibenden vier Zügen; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (LDS)

Nr. 18: die ersten beiden S-Züge sind Sf3-g5-f3; Auswahl zwischen zwei Möglichkeiten im dritten S-Zug; sieben Positionen für e5; vor Dg4 entweder genau ein Springerzug oder alle drei Springerzüge; Fallunterscheidung nach der Anzahl der Springerzüge vor Dg4:

- wenn nur ein Springerzug (Sg5) vor Dg4, dann sind die letzten drei der sechs noch offenen Züge jedenfalls Dg4, Sf3, S~; beliebige Position des ersten Springerzugs Sg5 unter den ersten drei der sechs Züge; Positionen der übrigen beiden Züge stehen dann fest (LL)
- wenn alle drei Springerzüge vor Dg4, dann ist Dg4 der letzte der sechs noch offenen Züge; unter den verbleibenden fünf Zügen zehn mögliche Kombinationen für die Verteilung der Positionen der beiden Züge Lg4 und Lxf5; die Positionen der drei Springerzüge stehen dann fest

Nr. 19: Auswahl zwischen zwei Möglichkeiten im dritten S-Zug; vor Dg4 entweder genau ein Springerzug oder alle drei; Fallunterscheidung nach der Anzahl der Springerzüge vor Dg4:

- wenn nur ein Springerzug (Sg5) vor Dg4, dann finden die fünf Züge Lg4, Lxf5, Dg4, Sf3, S~ in dieser Reihenfolge statt; nach Lg4 noch mindestens fünf weitere Züge; Fallunterscheidung nach der Zugnummer von Lg4:
  - o wenn 15. Lg4, dann sechs Positionen für den Bauernzug h5; unter den verbleibenden fünf Zügen sind Dg4, Sf3, S~ die letzten; beliebige Reihenfolge zwischen den beiden übrigen Zügen Lxf5 und Sg5
  - o wenn 16. Lg4, dann notwendig 15. Sg5; fünf Positionen für den Bauernzug h5; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (LDSS)
- wenn alle drei Springerzüge vor Dg4, dann nach Lg4 noch mindestens drei weitere Züge; Fallunterscheidung nach der Zugnummer von Lg4:
  - o wenn 15. Lg4, dann sechs Positionen für den Bauernzug h5; unter den verbleibenden fünf Zügen ist Dg4 der letzte; unter den verbleibenden vier Zügen vier Positionen für Lxf5; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (SSS)
  - o wenn 16. Lg4, dann notwendig 15. Sg5; fünf Positionen für h5; unter den verbleibenden vier Zügen ist Dg4 der letzte; unter den verbleibenden drei Zügen drei Positionen für Lxf5; die Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (SS)
  - o wenn 17. Lg4, dann notwendig 15. Sg5 und 16. Sf3; vier Positionen für h5; unter den verbleibenden drei Zügen ist Dg4 der letzte; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und S~
  - o wenn 18. Lg4, dann notwendig 15. Sg5, 16. Sf3 und 17. S~; drei Positionen für h5; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht fest (LD)

Nr. 20: die ersten beiden Springerzüge stehen fest (Sf3-g5-f3); danach zwei Varianten (Sf3-d2-f1 und Sf3-g5-f3); vor Dg4 kommt entweder genau ein Springerzug oder mindestens drei; Fallunterscheidung nach der Anzahl der Springerzüge vor Dg4:

- wenn genau ein Springerzug vor Dg4, dann Auswahl zwischen zwei Springermanövern; vor Dg4 kommen drei Züge und danach nochmals drei Züge, also notwendig 18. Dg4; die drei Züge Nr. 19-21 stehen fest (SSS); drei Positionen für Sg5 unter den drei Zügen Nr. 15-17; Reihenfolge der übrigen beiden Züge steht fest (LL)
- wenn genau drei Springerzüge vor Dg4, dann Auswahl zwischen zwei Springermanövern; die letzten beiden Züge stehen fest (DS); zehn Kombinationen für die Positionen der beiden Läuferzüge unter den ersten fünf Zügen; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (SSS)
- wenn vier Springerzüge vor Dg4, dann liegt notwendig das Springermanöver Sf3-g5-f3-d2-f1 vor; der Damenzug ist der letzte (21. Dg4); unter den ersten sechs Zügen 15 Kombinationen für die Positionen der beiden Läuferzüge; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (SSSS)

Nr. 21: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; der 21. Zug ist exf6 oder h5 oder der zweite S-Zug;  
Fallunterscheidung nach diesem Zug:

- wenn 21. exf6, dann sechs Positionen für e5 unter den ersten sechs Zügen; unter den verbleibenden fünf Zügen zehn verschiedene Kombinationen für die Positionen der beiden S-Züge; unter den verbleibenden drei Zügen ist Lg4 der erste; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge (Lxf5 und h5)
- wenn 21. h5, dann 15 Kombinationen für die Positionen der beiden Züge e5 und exf6 unter den ersten sechs Zügen, wobei aber eine Kombination mit 1/2 zu gewichten ist und zwei weitere mit 3/4 (wie gewohnt); unter den verbleibenden vier Zügen sechs Kombinationen für die Positionen der beiden S-Züge; die Reihenfolge der beiden übrigen Züge steht fest (LL)
- wenn 21. S~, dann wieder 15 Kombinationen für die beiden Züge e5 und exf6 mit den gewohnten Gewichten; unter den verbleibenden vier Zügen vier Positionen für den ersten S-Zug; unter den verbleibenden drei Zügen ist Lg4 der erste; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und h5

Nr. 22: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; der 21. Zug ist exf6 oder der dritte S-Zug;  
Fallunterscheidung nach diesem Zug:

- wenn 21. exf6, dann sechs Positionen für e5 unter den ersten sechs Zügen; weiterhin zehn Kombinationen für die Positionen der beiden L-Züge unter den verbleibenden fünf Zügen; die übrigen drei Züge (SSS) stehen fest
- wenn 21. S~, dann 15 Kombinationen für die Positionen der beiden Züge e5 und exf6 unter den ersten sechs Zügen mit den üblichen Gewichten; unter den verbleibenden vier Zügen sechs Kombinationen für die Positionen der beiden L-Züge; die übrigen beiden Züge (SS) stehen fest

Nr. 23: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; der 21. Zug ist e5 oder h5 oder der dritte S-Zug;  
Fallunterscheidung nach diesem Zug:

- wenn 21. e5, dann unter den ersten sechs Zügen 20 Kombinationen für die Positionen der drei S-Züge; unter den verbleibenden drei Zügen ist Lg4 der erste; beliebige Reihenfolge zwischen den beiden übrigen Zügen Lxf5 und h5
- wenn 21. h5, dann unter den ersten sechs Zügen sechs Positionen für e5; unter den verbleibenden fünf Zügen zehn Kombinationen für die Positionen der beiden Läuferzüge; die Reihenfolge der übrigen drei Züge steht fest (SSS)
- wenn 21. S~, dann unter den ersten sechs Zügen sechs Positionen für e5; unter den verbleibenden fünf Zügen zehn Kombinationen für die Positionen der beiden ersten Springerzüge; unter den verbleibenden drei Zügen ist Lg4 der erste; beliebige Reihenfolge zwischen den beiden übrigen Zügen Lxf5 und h5

Nr. 24: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; unter den ersten sechs Zügen 15 Kombinationen für die Positionen der beiden Läuferzüge; unter den verbleibenden fünf Zügen (einschließlich des 21. Zugs) fünf Positionen für den Bauernzug e5; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht dann fest (SSSS)

Nr. 25: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; der letzte Zug ist entweder h5 oder der letzte Springerzug; Fallunterscheidung nach dem letzten Zug:

- wenn 21. h5, dann unter den ersten sechs Zügen 15 Kombinationen für die Positionen der beiden Läuferzüge; die Reihenfolge der übrigen vier Züge steht fest (SSSS)

- wenn 21. S~, dann unter den ersten sechs Zügen 20 Kombinationen für die Positionen der drei ersten Springerzüge; unter den verbleibenden drei Zügen ist Lg4 der erste; beliebige Reihenfolge der beiden übrigen Züge Lxf5 und h5

Nr. 26: Auswahl zwischen zwei Manövern des S; unter den ersten sechs Zügen 15 Kombinationen für die Positionen der beiden L-Züge; der Rest steht fest

Aus der Tabelle ergibt sich eine Gesamtzahl von 3.928 Verläufen und damit 101.813.760 zusätzlichen optimalen Lösungen. Zu den bereits seit der Aufgabenstellung A[30,5] bekannten 562.930.560 optimalen Lösungen haben wir nun also 87.713.280 weitere mit dem Zug Lc1-e3 in der Schlussphase (Züge Nr. 16-21) und 101.813.760 mit dem Zug Lc1-e3 in den Zügen Nr. 9-13 gefunden. Zusammen ergibt dies 752.457.600 optimale Lösungen für die aktuelle Aufgabenstellung A[31,5].

An Schlussstellungen kennen wir seit A[30,5] bereits 43 verschiedene ohne wLe3. Weiter oben haben wir zusätzliche acht Schlussstellungen mit wLe3, wSf1 und sBg5 ermittelt, in denen Dd1, Be4, Bg4 zusammen genau einmal oder genau dreimal gezogen haben. Aus den Varianten, in denen das Feld d2 erstmalig durch den Zug Lc1-e3 besucht wird, ergeben sich nun weitere Schlussstellungen. In allen steht der wL auf e3. Wir listen die neuen Schlussstellungen getrennt nach dem Standfeld des wS auf – dafür gibt es die Möglichkeiten f3, d2, g5 und f1.

- Mit Sg5 hat der wS eine ungerade Anzahl von Zügen ausgeführt (einen, drei oder fünf Züge). Zusammen mit dem wL, der auf f5 geschlagen wird, sind es drei, fünf oder sieben Züge. Für die drei Steine Dd1, Be4, Bh4 bleiben kein Zug, zwei oder vier Züge übrig. Daraus ergeben sich neun verschiedene Kombinationen für die Schlussstellung.
- Mit Sd2 hat der wS ebenfalls eine ungerade Anzahl von Zügen gemacht (einen, drei oder fünf). Zusammen mit dem wL sind es drei, fünf oder sieben. Wenn der wS nur einmal gezogen hat, steht auf g5 noch ein sB; wenn der wS hingegen drei- oder fünfmal gezogen hat, ist der sBg5 geschlagen worden. Die drei Steine Dd1, Be4, Bh4 führen wieder zusammen keinen Zug, zwei Züge oder vier Züge aus. Wenn die drei Steine keinen Zug machen, muss der wS mindestens dreimal ziehen, und dann fehlt der sBg5. Wenn die drei Steine genau zweimal ziehen (fünf Kombinationen), kann der wS wahlweise einen oder drei Züge machen, und dann kann der sBg5 vorhanden sein oder fehlen. Wenn die drei Steine zusammen viermal ziehen (drei Kombinationen), dann zieht der wS nur einmal, und dann ist sBg5 noch auf dem Brett. Insgesamt erhalten wir in diesem Fall  $1 + 2 \cdot 5 + 3 = 14$  verschiedene Schlussstellungen.
- Mit Sf3 hat der wS entweder genau zweimal oder genau viermal gezogen; der sBg5 wurde in jedem Fall geschlagen; und für Dd1, Be4, Bh4 bleiben zusammen entweder ein Zug oder drei Züge übrig. Das führt auf acht Schlussstellungen.
- Mit Sf1 hat der wS ebenfalls genau zweimal oder genau viermal gezogen. Wenn er zweimal gezogen hat, steht sBg5 noch auf dem Brett; wenn er viermal gezogen hat, ist sBg5 geschlagen worden.
  - o Ohne sBg5 auf dem Brett müssen Dd1, Be4, Bh4 jetzt zusammen genau einen Zug ausgeführt haben. Dafür gibt es drei Möglichkeiten, also drei Schlussstellungen.
  - o Mit sBg5 auf dem Brett haben wS und wL zusammen vier- oder sechsmal gezogen, d.h. Dd1, Be4 und Bh4 ziehen zusammen einmal oder dreimal. Die acht Schlussstellungen, die sich unter diesen Voraussetzungen ergeben, sind nun allerdings nicht neu – wir haben sie bereits weiter oben gefunden, als der Läuferzug Lc1-e3 als Freizug in der Schlussphase eingesetzt wurde.

Die Gesamtzahl der Schlussstellungen beträgt damit  $43 + 8 + 9 + 14 + 8 + 3 = 85$ . Die letzte eindeutige Position wird jetzt schon mit dem 7. Zug von Schwarz erreicht.

### A[32,0]

Der 32. schwarze Zug besucht kein neues Feld. Der Läuferzug Le8-h5 kann aber dem schwarzen Bauernzug g7-g5 die Aufgabe abnehmen, das Feld g6 zu besuchen. Der Bauernzug ist trotzdem erforderlich, um das Feld g7 für Sf5-g7 zu räumen, aber er kann jetzt als Freizug ausgeführt werden (Weiß kümmert sich um den Besuch auf g5). Die beiden Läuferzüge La4-e8 und Le8-h5 ersetzen die beiden Turmzüge Td8-f8 und Tf8-f6; dies ist möglich, weil der Läufer auf seiner Wanderung neben g6 auch noch die beiden Felder e8 und f6 besucht. Die Gesamtzahl von 21,0 Zügen bleibt damit gleich, aber Schwarz kann nun am Parteeende vor 21... Sf5-g7 neben dem Freizug Se7-f5 noch einen zweiten Freizug unterbringen (g7-g5). Wir erhalten den folgenden Lösungsverlauf: 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. Sc3 Dc7 8. a3 Sc6 9. Te1 O-O-O 10. Sg5 f5 11. Dg4 Sa5 12. Ta2 Le8 13. Le3 Dh2+ 14. Kxh2 Lh5 15. Le2 Se7 16. Dh3 Thf8 17. Lxh5 c4 18. Sf3 h6 19. Lg4 g5 20. Lxf5 Sxf5 21. e5 Sg7 (21,0 Züge).

Nach der Vorbemerkung ist klar, dass der Zügevorrat der 21 schwarzen Züge feststeht und dass die drei letzten Züge 21. Sf5-g7 und 19./20. Se7-f5 und g7-g5 (in beliebiger Reihenfolge) sein müssen. Nur auf diese Weise kann Schwarz im letzten Zug nur ein Feld verlieren und davor zwei Freizüge spielen. Im weiteren Rückwärtsspiel sind dann 17./18. c5-c4 und h7-h6 (in beliebiger Reihenfolge) die einzigen beiden Züge, die nur ein Feld verlieren. Davor ist 16. Th8-f8 der einzige Zug, der nur zwei Felder verliert und davor einen Freizug ermöglicht; und 15. Sg8-e7 ist dieser Freizug. Die letzten sieben schwarzen Züge stehen also (bis auf zwei mögliche Vertauschungen in der Reihenfolge) fest. Weiß muss in den sieben Zügen Nr. 15-21 sieben Freizüge spielen.

Im 14. Zug von Schwarz besteht die Auswahl zwischen Le8-h5 und Dc7-h2. Beide Züge verlieren jeweils mindestens zwei Felder (f7 und g6 bzw. f4 und g3) und potenziell noch mehr, wobei Le8-h5 natürlich höchstens drei Felder verlieren kann.

Weiß muss sich um die Besuche der Felder e1, f1, g1, a2, d2, e2, a3, c3, d3, e3, f3, h3, d4, e4, g4, h4, g5 kümmern und benötigt dafür zwingend die elf Züge O-O, Ta1-a2, Tf1-e1, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3-g5, a2-a3, d2-d4, e2-e4, h2-h4. Hinzu kommt ein weiterer Zug für das Feld d2 (Lc1-e3 oder Sf3-d2) und ein Zug für das Feld g4 (Dd1-g4 oder Le2-h5). Der letzte der 13 bisher erwähnten Züge kann kein Freizug sein, und deshalb müssen diese 13 Züge alle innerhalb der ersten 14 Züge der Lösung stattfinden.

Unter den ersten 14 schwarzen Zügen ist insbesondere der Damenzug Dc7-h2. Wenn dieser vor der weißen Rochade gespielt würde, müsste die sD bereits vor wO-O auf dem Feld h2 geschlagen werden, und das ginge nur durch Dg4-h3-h2; doch dann hätten wir schon mindestens 15 weiße Züge, die in den ersten 14 Zügen untergebracht werden müssten. Der Zug sDc7-h2 wird also jedenfalls nach wO-O gespielt, und dann muss die sD als unmittelbare Antwort auf das Schach Dc7-h2+ geschlagen werden (durch Kg1xh2 oder Dh3xh2).

Würde Weiß das Feld h2 bereits vor der sD besuchen, so wäre dies nur durch Dg4-h3-h2 möglich, und dann hätten wir wieder 15 weiße Züge, die in den ersten 14 Zügen gespielt werden müssten. Also verliert der Zug sDc7-h2 das Feld h2. Würde Weiß das Feld e5 bereits vor der sD besuchen, so wäre dies ebenso nur durch e4-e5-f6 möglich, und dann hätten wir wieder zu viele weiße Züge. Also verliert sDc7-h2 auch das Feld e5 und damit insgesamt schon vier Felder. Deshalb ist nun klar, dass

im 14. schwarzen Zug Le8-h5 geschehen muss. Noch unklar ist allerdings, ob dieser Zug notwendig das Feld h5 verliert.

Der Damenzug sDc7-h2 findet in den ersten 13 Zügen statt, und als unmittelbare Antwort darauf schlägt Weiß auf h2. Der Schlag Dh3xh2 würde nun wieder zu viele weiße Züge innerhalb der ersten 14 Züge der Lösung benötigen, so dass notwendig Kg1xh2 geschehen muss; und dieser Zug findet in den ersten 14 Zügen statt. Für die Besuche der oben aufgelisteten 17 Felder bleiben jetzt nur noch 13 weiße Züge übrig. Für das Feld d2 scheidet deshalb der Zug Sf3-d2 aus, weil er den zusätzlichen Bereitstellungszug Sg5-f3 benötigen würde; und ebenso scheidet für das Feld g4 der Zug Le2-h5 aus, weil er den Vorbereitungszug Ld3-e2 erfordert. Die ersten 14 weißen Züge stehen damit fest – zu den elf oben bereits erwähnten Zügen kommen noch Dd1-g4, Lc1-e3 und Kg1xh2 hinzu.

Weiß besucht also in den ersten 14 Zügen nicht das Feld h5, so dass 14... Le8-h5 tatsächlich drei Felder verlieren muss. Davor ist 14. Kg1xh2 der einzige mögliche Freizug, und davor muss 13... Dc7-h2+ geschehen. Die Stellung nach 12,5 Zügen ist eindeutig, und das weitere Rückwärtsspiel ist einfach zu überblicken. Damit Weiß im Rückwärtsspiel den Zug Sb1-c3 bereits vor der Rochade zurücknehmen kann, muss Schwarz im 5. Zug den Läuferzug Lf8-b4 zurücknehmen.

Weil unter den ersten zwölf schwarzen Zügen der Bauernzug f7-f5 ist und später im Lösungsverlauf noch sSe7-f5 folgt, muss Weiß den sBf5 schlagen. Das geht nicht durch e5xf6, weil der En-passant-Schlag direkt auf f7-f5 folgen müsste und Weiß dazu in den ersten 13 Zügen der Lösung keine Zeit hat. Also muss Weiß den sB durch das Manöver Ld3-e2-h5-g4-f5 beseitigen. Alle diese vier Läuferzüge können erst nach dem 14. Zug geschehen. Hinzu kommt noch der Damenzug Dg4-h3, um die Diagonale für den Läufer zu räumen. Da Schwarz spätestens im 20. Zug Se7-f5 spielt, müssen die fünf Züge von wL und wD alle in den sechs Zügen Nr. 15-20 untergebracht werden. Außerdem ist in diesen sechs Zügen auch noch der Springerzug Sg5-f3 erforderlich, um g7-g5 zu ermöglichen. Damit stehen die sechs weißen Züge Nr. 15-20 bis auf die Reihenfolge fest. Da die Züge Ld3-e2 und Dg4-h3 vor Le2xh5 gespielt werden müssen und die Züge Sg5-f3, Lh5-g4 und Lg4xf5 erst danach möglich sind, muss im Lösungsverlauf sogar notwendig 17. Le2xh5 geschehen. Davor haben wir die beiden Züge Ld3-e2 und Dg4-h3 in beliebiger Reihenfolge und danach die drei Züge Lh5-g4-f5 und Sg5-f3 (drei mögliche Kombinationen).

Obwohl die letzten acht weißen Züge im Lösungsverlauf Freizüge sind, sind sie also trotzdem zu einem sehr großen Teil festgelegt. Nur der 21. Zug ist ein reiner Abwartezug; für ihn bestehen die vier Möglichkeiten Sf3xg5, Sf3-d2, e4-e5 und h4-h5.

In der weißen Zugreihenfolge sind die ersten beiden Züge vertauschbar und ebenso die beiden Züge Nr. 3+4. Die Reihenfolge der sieben Züge Nr. 7-13 ist beliebig, wobei allerdings a2-a3 vor Ta1-a2 stattfinden muss und außerdem Sf3-g5 vor Dd1-g4. Dafür gibt es 1.260 Kombinationen. Wie bereits erwähnt, gibt es für die beiden Züge Nr. 15+16 zwei Möglichkeiten, für die drei Züge Nr. 18-20 drei und für den letzten Zug vier Möglichkeiten. In der schwarzen Zugfolge gibt es nur sehr wenig Auswahl: Die beiden Züge Nr. 17+18 können in beliebiger Reihenfolge geschehen. Die Reihenfolge der beiden Züge Nr. 19+20 ist zwar a priori nicht festgelegt, aber sie folgt zwingend aus der Reihenfolge der drei weißen Züge Nr. 18-20: Wenn Weiß erst im 20. Zug auf f5 schlägt, muss Schwarz 19... g7-g5 ziehen; und wenn Weiß schon im 19. Zug auf f5 schlägt, so verlässt der wS das Feld g5 erst im 20. Zug, und dann muss Schwarz zuerst 19... Se7xf5 spielen.

Insgesamt erhalten wir 241.920 optimale Lösungen, und es gibt vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 20. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[32,5] und A[33,0]**

Der 33. weiße Zug besucht kein neues Feld. Der Königszug Kh2-g3 kann zur Verbesserung der Lösung nichts beitragen, da er natürlich nicht vor sDc7-h2 gespielt werden könnte. Der Zug kann nicht einmal im letzten Zug als Abwartezug gespielt werden, weil der wK auf g3 in das Schach des sSf5 zöge. Somit ändert sich im Vergleich zur vorangegangenen Aufgabenstellung A[32,0] nichts an den optimalen Lösungen. Der 33. schwarze Zug kann offenbar ebenfalls nichts zur Lösung beitragen.

### **A[33,5]**

Der 34. weiße Zug besucht das neue Feld b2, und wir erhalten  $F[33,5] = 48$ . Der Turmzug wTa2-b2 wird für die Lösung benötigt. Zur Vorbereitung dieses Zuges ist außerdem b2xc3 erforderlich, und dafür muss Schwarz auf dem Feld c3 durch Lb4-c3 ein Schlagopfer bereitstellen. Die Lösung verlängert sich dadurch auf 22,0 Züge. Immerhin kann Weiß den Zug Sb1-c3 einsparen. Der Verlauf der Lösung verändert sich strukturell nur geringfügig: Weiß lässt in der Gruppe der Züge, die jeweils nur ein Feld verlieren, den Zug Sb1-c3 weg und ergänzt dafür am Ende dieser Gruppe die beiden Züge b2xc3 und Ta2-b2; die Ergänzung muss am Ende erfolgen, weil b2xc3 ein Freizug ist. Schwarz fügt parallel in der Gruppe der Züge, die jeweils nur ein Feld verlieren, den zusätzlichen Zug Lb4-c3 ein. Wir erhalten 1. e4 d5 2. d4 Ld7 3. Sf3 La4 4. Ld3 e6 5. O-O Lb4 6. h4 c5 7. a3 Dc7 8. Te1 Sc6 9. Sg5 O-O-O 10. Dg4 f5 11. Ta2 Lc3 12. Le3 Sa5 13. bxc3 Le8 14. Tb2 Dh2+ 15. Kxh2 Lh5 16. Le2 Se7 17. Dh3 Thf8 18. Lxh5 c4 19. Sf3 h6 20. Lg4 g5 21. Lxf5 Sxf5 22. e5 Sg7 (22,0 Züge).

Bei Weiß sind die beiden Züge Nr. 1+2 vertauschbar und ebenso die Züge Nr. 3+4. Die Reihenfolge der sechs Züge Nr. 7-12 ist beliebig, wobei a2-a3 vor Ta1-a2 geschehen muss und Sf3-g5 vor Dd1-g4 (180 Kombinationen). Die beiden Züge Nr. 16+17 sind vertauschbar, und für die drei Züge Nr. 19-21 gibt es drei Kombinationen. Im letzten Zug hat Weiß die Auswahl zwischen vier Zugmöglichkeiten. Bei Schwarz sind die beiden Züge Nr. 18+19 vertauschbar, außerdem jetzt auch die beiden Züge Nr. 11+12. Die Reihenfolge der beiden schwarzen Züge Nr. 20+21 ergibt sich zwangsläufig aus der weißen Zugreihenfolge. Es gibt 69.120 optimale Lösungen und vier verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[34,0] bis A[35,0]**

Der 34. und 35. schwarze und der 35. weiße Zug besuchen keine neuen Felder und spielen für die optimalen Lösungen keine Rolle. Es ändert sich nichts.

### **A[35,5]**

Der 36. weiße Zug besucht zwar kein neues Feld, aber durch den Besuch von f4 ist es nun möglich, den Damenzug sDc7-h2 einsparen. Der Damenzug hat in den bisherigen Lösungen zwar gleich vier Felder erstmalig besucht (e5, f4, g3, h2), doch alle diese Felder kann jetzt Weiß übernehmen. Dazu sind die vier Züge e4-e5, Kg1-h2-g3 und Le3-g5 erforderlich. Die Lösung verkürzt sich um einen Zug auf 21,0 Züge. Davon stehen 19 schwarze unmittelbar fest (O-O-O, Dd8-c7, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6-a5, Sg8-e7-f5-g7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6). Die beiden verbleibenden Züge müssen die beiden Felder e8 und f7 besuchen, wofür es a priori drei mögliche Kombinationen gibt: La4-e8-h5, La4-e8 und Tf8-f6, Td8-f8 und Tf8-f6. Bei Weiß stehen zunächst 16 Züge fest: O-O, Kg1-h2-g3, Ta1-a2-b2, Tf1-e1, Lc1-e3-g5, Lf1-d3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4-e5, h2-h4. Hinzu

kommt mindestens ein weiterer Zug für das Feld g4 (Dd1-g4 oder Ld3-e2-h5). Da der wK nach g3 zieht und dort bis zum Ende des Lösungsverlaufs verbleibt, muss das schwarze Springermanöver Sg8-e7-f5-g7 bereits vor wKh2-g3 erledigt werden, und daraus folgt nun, dass Schwarz im Rückwärtsspiel am Ende des Lösungsverlaufs den Springer zunächst auf g7 stehen lassen muss. Damit kann Schwarz sich am Ende keine unmittelbare Hoffnung auf einen Freizug machen. Das optimale Vorgehen für Schwarz besteht darin, Züge zurückzunehmen, die jeweils nur genau ein Feld verlieren – und zwar so lange, bis Weiß den Königszug Kh2-g3 zurücknimmt. Weiß wiederum nimmt in der Schlussphase der Partie zunächst möglichst viele Freizüge zurück und hat deshalb vorläufig keine Gelegenheit zu Kh2-g3. Da wir von mindestens 17 weißen Zügen wissen, deren letzter kein Freizug ist, können wir auf bis zu vier weiße Freizüge am Partieende hoffen. Es stellt sich nun die Frage, welche Seite im Partieverlauf das Feld h5 erstmals besucht. Wäre dies Schwarz, so müsste dazu das Manöver La4-e8-h5 geschehen; doch dann hätte Schwarz am Partieende nur zwei Züge zur Verfügung, die nur ein Feld verlieren (nämlich c5-c4 und h7-h6), und das wäre nicht optimal. Also muss Weiß das Feld h5 besuchen, und zu diesem Zweck (und für den Besuch auf g4) benötigt er dann zusätzlich zu den 16 bereits bekannten Zügen noch mindestens zwei weitere: entweder Ld3-e2-h5 oder Dd1-g4 und h4-h5. Es gibt somit bereits 18 weiße Züge, von denen der letzte kein Freizug ist. Weiß kann am Ende des Lösungsverlaufs drei Freizüge ausführen, und Schwarz nimmt in dieser Partiephase lauter Züge zurück, die nur ein Feld verlieren. Im 18. Zug nimmt Weiß nun aber immer noch nicht Kh2-g3 zurück, sondern spielt zunächst 18. Ta2-b2, weil dadurch der weiße Freizug 17. b2xc3 ermöglicht wird. Erst im 16. Zug kommt es zu Kh2-g3. Schwarz muss also am Partieende sechs Züge zurücknehmen, die alle nur ein Feld verlieren, und der Zug Sf5-g7 ist nicht darunter. Weiß hat keine Zeit, um nach f7-f5 und vor Se7-f5-g7 (und damit innerhalb der ersten 15 Züge) den schwarzen f-Bauern zu schlagen (durch e5xf6 oder Lg4xf5), so dass f7-f5 im Lösungsverlauf notwendig nach Se7-f5-g7 geschehen muss. Aus dem gleichen Grund kann Weiß auch nicht schon vor sSe7-f5 das Feld f5 besuchen (durch Lg4-f5), und Weiß kann auch nicht vor g7-g5 das Feld g5 besuchen (durch Sf3-g5-f3). Der Läuferzug wLe3-g5 muss natürlich nach g7-g5 geschehen, weil der wL sonst das Feld g5 für den sB blockieren würde. Schwarz verliert also in den beiden Zügen Se7-f5 und f7-f5 je ein Feld und im Zug g7-g5 sogar zwei Felder.

Als optimale Lösung erhalten wir 1. e4 e6 2. Ld3 Lb4 3. Le2 d5 4. Lh5 Ld7 5. h4 La4. 6. Sf3 c5 7. O-O Dc7 8. d4 Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 Lc3 13. Le3 Sge7 14. Lxg5 Sf5 15. Kh2 Sg7 16. Kg3 Sa5 17. bxc3 c4 18. Tb2 h6 19. Te3 f5 20. Te1 Tf6 21. Te3 Thf8 (21,0 Züge).

Wie bereits beschrieben, verliert Schwarz in den letzten sechs Zügen jeweils ein Feld. Davor erhält er die Gelegenheit zu dem dreizügigen Manöver 13.-15. Sg8-e7-f5-g7, wobei der 13. Zug ein Freizug ist und die beiden anderen Züge je ein Feld verlieren. Damit dieses Springermanöver möglich wird, muss der Zug Th8-f8 in der Schlussphase in einem der sechs Züge Nr. 16-21 gespielt werden, und dieser Turmzug darf deshalb nur ein Feld verlieren. Das Feld f8 muss bereits vorher im Lösungsverlauf durch Td8-f8 besucht werden, und der schwarze Damenturm muss dieses Feld außerdem auch wieder räumen, was nur durch Tf8-f6 möglich ist. Die beiden bisher noch offenen schwarzen Züge lauten also Td8-f8-f6. Alle 21 schwarzen Züge stehen fest, außerdem sind die drei Züge Nr. 13-15 exakt bekannt. Die sieben Züge Nr. 12 und Nr. 16-21 verlieren jeweils ein Feld, und davor gibt es zwei Züge (Nr. 10+11), die je zwei Felder verlieren. Die Reihenfolge der ersten neun schwarzen Züge ist klar und entspricht den bereits von weiter oben bekannten Lösungsverläufen.

Bei Weiß sind die drei letzten Züge (Nr. 19-21) reine Abwartezüge, und die drei Züge davor (Nr. 16-18) stehen exakt fest. In der Partiephase davor nimmt Weiß eine Reihe von Zügen zurück, die je ein Feld verlieren. Dazu zählen auf jeden Fall die sieben Züge Kg1-h2, Ta1-a2, Tf1-e1, Lc1-e3-g5, a2-a3 und e4-e5. Für den Besuch der beiden Felder g4 und h5 hatten wir oben zwei Möglichkeiten identifiziert: entweder Ld3-e2-h5 oder Dd1-g4 und h4-h5. Im ersteren Fall kann Weiß in der

Partiephase vor dem 16. Zug zusätzlich zu den bereits erwähnten sieben Zügen auch noch den Zug d2-d4 zurücknehmen, der nur ein Feld verliert. Im anderen Fall gibt es ebenfalls einen solchen Zug, nämlich h4-h5. In jedem Fall hat Weiß also in den acht Zügen Nr. 8-15 acht Züge zur Auswahl, die je ein Feld verlieren. Im Fall von Dd1-g4 und h4-h5 ergibt sich dann im weiteren Rückwärtsspiel allerdings das Problem, dass die Rücknahme 7. O-O nicht funktioniert (wegen des Schachs des sLb4) und damit auch der Freizug 6. Sg1-f3 nicht zur Verfügung steht. Deshalb können wir schließen, dass für den Besuch der Felder g4 und h5 das Manöver Ld3-e2-h5 erforderlich ist. Die Gesamtheit der acht weißen Züge Nr. 8-15 steht damit fest (einschließlich d2-d4), und der Verlauf der Züge Nr. 1-7 ist im weiteren Rückwärtsspiel eindeutig.

Wie wir gesehen haben, stehen bei Schwarz die Züge Nr. 1-9 und 13-15 exakt fest. Die beiden Züge Nr. 10-11 lauten Td8-f8 und g7-g5 (in beliebiger Reihenfolge). Die Reihenfolge der sieben Züge Nr. 12 und Nr. 16-21 ist grundsätzlich frei, wobei aber die folgenden Abhängigkeiten zu beachten sind:

- Der Königsläufer wird im 17. weißen Zug als Schlagopfer auf c3 benötigt, und deshalb muss der Zug Lb4-c3 im 12. oder 16. Zug stattfinden.
- Die drei Züge f7-f5, Tf8-f6 und Th8-f8 müssen in dieser Reihenfolge gespielt werden. Außerdem kann der erste dieser drei Züge (f7-f5) erst nach 15... Sf5-g7 geschehen, und deshalb müssen alle drei Züge in die Phase der letzten sechs Züge (Nr. 16-21) fallen.

Davon abgesehen, gibt es keine weiteren Einschränkungen: Die übrigen drei Züge Sc6-a5, c5-c4 und h7-h6 können an beliebiger Stelle und in beliebiger Reihenfolge eingeschoben werden. Die Gesamtzahl der möglichen Kombinationen der schwarzen Züge Nr. 12-21 lässt sich nun folgendermaßen bestimmen:

- Wenn 12.. Lb4-c3, dann 20 Möglichkeiten für die Verteilung der drei Züge f5, Tf6, Thf8 auf die letzten sechs Züge;
- wenn 16... Lb4-c3, dann 10 Möglichkeiten für die Verteilung der drei Züge f5, Tf6, Thf8 auf die letzten fünf Züge;

in beiden Fällen können die drei verbleibenden Züge auf 6 Arten auf die verbleibenden Positionen verteilt werden. Es gibt damit  $6 * (20+10) = 180$  Kombinationen für die schwarzen Züge Nr. 12-21.

Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-7 und 16-18 exakt fest. Für die acht Züge Nr. 8-15 bestehen die folgenden Abhängigkeiten:

- Die drei Züge d2-d4, Lc1-e3, Le3-g5 müssen in dieser Reihenfolge gespielt werden.
- Die beiden Züge a2-a3 und Ta1-a2 müssen in dieser Reihenfolge gespielt werden.
- Seit dem 7. schwarzen Zug steht die sD auf c7, und die Felder d6, f4 und g3 sind frei. Damit Weiß nun den Zug Kg1-h2 ausführen kann, muss zuvor e4-e5 geschehen (Schachschutz).
- Der Zug Le3-g5 darf erst nach g7-g5 erfolgen.

Davon abgesehen, gibt es keine weiteren Einschränkungen. Wir ermitteln zweckmäßigerweise die Gesamtzahl der Verläufe für die acht weißen Züge Nr. 8-15 zusammen mit den beiden schwarzen Zügen Nr. 10+11. Wir wissen, dass g7-g5 entweder im 10. oder im 11. Zug von Schwarz geschieht. Die drei Züge d4, Le3, Lg5 können grundsätzlich auf 56 Arten auf die acht Positionen Nr. 8-15 verteilt werden. Natürlich geschieht Lg5 dabei frühestens im 10. Zug. Es gibt unter den 56 Kombinationen nur genau eine mit 10. Lg5, und diese scheidet nun aus, weil g7-g5 erst danach geschähe. Weiterhin gibt es drei Kombinationen mit 11. Lg5, und diese erfordern dann zwingend 10... g5 und 11... Tf8. Bei den verbleibenden 52 der 56 Kombinationen geschieht Lg5 erst im 12. Zug oder später, und dann haben wir die freie Auswahl für die Reihenfolge der beiden schwarzen Züge Nr. 10+11. Wenn die drei Züge d4, Le3, Lg5 verteilt sind, gibt es noch fünf Möglichkeiten für die Position von Tf1-e1 und unter

den verbleibenden vier Zügen dann sechs Möglichkeiten für die Positionen von a3 und Ta2; die Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge e5 und Kh2 steht dann fest. Für die acht weißen Züge Nr. 8-15 und die beiden schwarzen Züge Nr. 11+12 erhalten wir insgesamt  $(3+2*52)*5*6 = 3.210$  Kombinationen. Für die 21 schwarzen Züge und die ersten 18 weißen Züge der Lösung gibt es damit  $180 * 3.210 = 577.800$  Kombinationen.

Es bleiben nun noch die möglichen Verläufe für die letzten drei weißen Züge zu bestimmen. Nach dem 18. Zug von Weiß stehen den acht weißen Steinen Kg3Tb2Lg5Ba3c3c2d4g2 keine weiteren Züge aus dem Vorrat von *CarCar*[35,5] mehr zur Verfügung. Der Sb1 kann wegen des Bc3 ebenfalls nicht ziehen, und der Be5 ist zwischen sDc7 und wKg3 gefesselt. Deshalb müssen die drei weißen Abwartezüge von den sechs Steinen Dd1, Te1, Lh5, Sf3, Bf2, Bh4 ausgeführt werden.

- Die Dd1 kann bis zu zwei Züge ausführen: Dd1-g4-h3. Ein dritter Zug ist nicht möglich, weil vor Dd1-g4 bereits der Sf3 das Feld f3 räumen muss.
- Der Te1 kann zwischen e1 und e3 pendeln: Te1-e3-e1-e3.
- Der Lh5 hat als ersten Zug Lh5-g4 zur Verfügung und kann daran als zweiten Zug Lg4-f3 oder Lg4-f5 anschließen. Ein dritter Zug ist nicht möglich, weil es für den wL von f5 aus nicht weitergeht und für den Zug Lg4-f3 das Feld f3 zuvor durch einen Zug des Sf3 geräumt werden musste. Der wL darf das Feld f5 erst nach dem schwarzen Bauernzug f7-f5 betreten, weil er den sB sonst blockieren würde; diese Bedingung stellt allerdings kein Problem dar, weil der wL frühestens im 20. Zug nach f5 gelangen kann und andererseits nach f7-f5 noch Tf8-f6 und Th8-f8 folgen, so dass f7-f5 spätestens im 19. schwarzen Zug geschieht.
- Der Sf3 hat die Möglichkeit zu der dreizügigen Wanderung Sf3-d2-f1-e3. Der Zug Sf3-g5 steht ihm wegen des Lg5 nicht zur Verfügung.
- Der Bf2 verfügt über den Zug f2-f3.
- Der Bh4 kann h4-h5 ziehen.

Zwischen den Manövern der sechs weißen Steine in den drei Zügen Nr. 19-21 bestehen einige Abhängigkeiten:

- Dd1 und Sf3: Wenn die wD sich bewegt, ist vor dem ersten Damenzug Dd1-g4 bereits Sf3-d2 erforderlich.
- Dd1 und Lh5: Wenn D und L sich beide bewegen würden, müsste auch der S einen Zug machen, und dann hätten wir die drei Züge Sf3-d2, Dd1-g4 und Lh5-g4, so dass D und L auf dem Feld g4 aufeinanderträfen. Also kann von den beiden Figuren D und L höchstens eine ziehen.
- Dd1 und Bf2: Wenn sowohl die D als auch der Bf2 ziehen, muss Dd1-g4 vor f2-f3 geschehen.
- Lh5 und Sf3: Wenn der L das zweizügige Manöver Lh5-g4-f3 ausführt, ist vor Lg4-f3 der Springerzug Sf3-d2 erforderlich.
- Lh5 und Bh4: Wenn der Zug h4-h5 vorkommt, muss zuvor Lh5-g4 gespielt werden.
- Sf3 und Bf2: Wenn der Zug f2-f3 vorkommt, muss zuvor Sf3-d2 geschehen.

Aus diesen Abhängigkeiten folgen weitere, quasi „indirekte“ Einschränkungen:

- Dd1 und Bh4 können nicht beide ziehen (denn für h4-h5 müsste sich der Lh5 bewegen, und dies ist mit keinem Damenzug vereinbar);
- Bf2 und Bh4 können nicht beide ziehen (denn dann müssten auch Sf3 und Lh5 ziehen, und dann hätten wir insgesamt vier Züge).

Der Te1 ist die einzige Figur, für die überhaupt keine Abhängigkeiten bestehen. Zwar kann der Sf3 das Feld e3 erreichen, aber da er dafür drei Züge braucht, ist dann für den Te1 ohnehin kein Zug mehr frei.

An der Schlussstellung ist in jedem Fall für die fünf Steine DLSBB erkennbar, welche Züge sie ausgeführt haben. Damit ist dann auch klar, wie oft der Turm gezogen hat, und dann stehen auch die konkreten Turmzüge fest.

Mit diesen Vorbemerkungen ist es nun einfach, die verschiedenen Verläufe der drei letzten Züge von Weiß und die daraus resultierenden Schlussstellungen abzuzählen.

Dd1	Te1	Lh5	Sf3	Bf2	Bh4	Verläufe	Schlussstellungen
2	-	-	1	-	-	1	1
1	1	-	1	-	-	3	1
1	-	-	2	-	-	2	1
1	-	-	1	1	-	1	1
-	3	-	-	-	-	1	1
-	2	1	-	-	-	3	1
-	2	-	1	-	-	3	1
-	1	2	-	-	-	3	1
-	1	1	1	-	-	6	1
-	1	1	-	-	1	3	1
-	1	-	2	-	-	3	1
-	1	-	1	1	-	3	1
-	-	2	1	-	-	5	2
-	-	2	-	-	1	2	1
-	-	1	2	-	-	3	1
-	-	1	1	1	-	3	1
-	-	1	1	-	1	3	1
-	-	-	3	-	-	1	1
-	-	-	2	1	-	2	1

Es ergeben sich 51 Verläufe für die drei letzten weißen Züge und 20 Schlussstellungen. Insgesamt haben wir somit 29.467.800 optimale Lösungen und 20 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 7. Zug von Schwarz erreicht.

#### A[36,0]

Der 36. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die optimalen Lösungen keine Rolle. Es ändert sich nichts.

#### A[36,5]

Der 37. weiße Zug besucht kein neues Feld. Der Bauernzug f3-f4 kann nicht an Stelle von wLe3-g5 für den Besuch des Feldes f4 verwendet werden, weil das Manöver f2-f3-f4 einen zusätzlichen Zug benötigen würde. Am Lösungsverlauf ändert sich damit nichts; allerdings kann der Bauernzug f3-f4 in der Schlussphase der Lösung als zusätzlicher Abwartezug eingesetzt werden. Da davor die beiden Züge Sf3-d2 und f2-f3 geschehen müssen, kommen nur ein einziger Verlauf und eine einzige Schlussstellung hinzu:

Dd1	Te1	Lh5	Sf3	Bf2	Bh4	Verläufe	Schlussstellungen
-	-	-	1	2	-	1	1

Wir erhalten 52 Verläufe für die letzten drei weißen Züge, insgesamt 30.045.600 optimale Lösungen und 21 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 7. Zug von Schwarz erreicht.

### A[37,0]

Der 37. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die optimalen Lösungen keine Rolle. Es ändert sich nichts.

### A[37,5]

Der 38. weiße Zug besucht kein neues Feld und kann die Lösung nicht verbessern. Der Turmzug Te1-e2 kann allerdings in der Schlussphase der Lösung als zusätzlicher Abwartezug eingesetzt werden. Da der Turm das Feld e2 danach nicht wieder verlassen kann, muss der Zug Te1-e2 auf jeden Fall der letzte Turmzug im Lösungsverlauf sein. Der Turm führt in der Schlussphase entweder alle drei Abwartezüge aus (Te1-e3-e1-e2), oder er zieht genau einmal (Te1-e2). Wenn er genau einmal zieht, besteht außerdem eine Abhängigkeit mit den Manövern der Dame: Wenn die Dd1 zieht, darf der Zug Te1-e2 erst nach Dd1-g4 geschehen. Wir erhalten die folgenden zusätzlichen Verläufe für die Schlussphase mit Te1-e2:

Dd1	Te1	Lh5	Sf3	Bf2	Bh4	Verläufe	Schlussstellungen
1	1	-	1	-	-	1	1
-	3	-	-	-	-	1	1
-	1	2	-	-	-	3	1
-	1	1	1	-	-	6	1
-	1	1	-	-	1	3	1
-	1	-	2	-	-	3	1
-	1	-	1	1	-	3	1

Wir erhalten 20 zusätzliche Verläufe der Schlussphase und sieben zusätzliche Schlussstellungen. Insgesamt führt dies auf 72 Verläufe der Schlussphase, 41.601.600 optimale Lösungen und 28 verschiedenen Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 7. Zug von Schwarz erreicht.

### A[38,0]

Der 38. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die optimalen Lösungen keine Rolle. Es ändert sich nichts.

### A[38,5]

Der 39. weiße Zug besucht das neue Feld b1, und wir erhalten  $F[38,5] = 49$ . Der Turmzug wTb2-b1 wird für die Lösung benötigt, und zur Vorbereitung muss außerdem wSb1-c3 geschehen. Für Weiß haben wir nun schon 19 zwingend erforderliche Züge (von denen der letzte kein Freizug ist), und wenn Weiß im Partieverlauf das Feld h5 zuerst besuchen sollte, wären es sogar 20 Züge. Deshalb erweist es sich jetzt als günstiger, wenn Schwarz den Besuch auf dem Feld h5 übernimmt. Anstelle

von Td8-f8 und Tf8-f6 geschieht jetzt La4-e8-h5. Der Läuferzug Le8-h5 verliert mindestens zwei Felder (f7 und h5), und auch der Turmzug Th8-f8 verliert jetzt zwei Felder. Bei Weiß entfällt das Manöver Ld3-e2-h5, dafür wird das Feld g4 jetzt durch Dd1-g4 besucht. Die drei Züge, die im Lösungsverlauf auf dem Feld c3 enden, müssen in der Reihenfolge wSb1-c3, sLb4xc3 und wBb2xc3 geschehen, d.h. sLb4-c3 ist jetzt ein Freizug. Am Partieende hat Schwarz zwei Züge, die jeweils nur ein Feld verlieren (c5-c4 und h7-h6); Weiß macht zwei Freizüge als Abwartezüge. Im 19. Zug muss Schwarz zwei Felder verlieren, und unter den beiden Möglichkeiten Le8-h5 und Th8-f8 erweist sich hier Le8-h5 als günstiger, weil dieser Zug im weiteren Rückwärtsspiel mehrere Züge ermöglicht, die nur ein Feld verlieren (f7-f5, La4-e8, Sc6-a5). Weiß nimmt im 18. und 19. Zug die beiden Turmzüge Ta2-b2-b1 zurück, um dadurch auf den Freizug 17. b2xc3 zuzusteuern. Schwarz beantwortet im Rückwärtsspiel den Entschlag 17. b2xc3 mit dem Freizug Lb4xc3. Weiß nimmt in der Partiephase vor dem 17. Zug insgesamt acht Züge zurück, die jeweils nur ein Feld verlieren; darunter ist auch der Zug Kg2-h3, der bei Schwarz die Rücknahme von Sf5-g7 und Se7-f5 ermöglicht, welche beide je ein Feld verlieren. Insgesamt verfügt Schwarz in den Zügen Nr. 13-15 und 17-18 (unterbrochen von dem Freizug 16... Lxc3) über fünf Züge, die jeweils ein Feld verlieren. Im 12. Zug muss Schwarz zwei Felder verlieren, und von den beiden Möglichkeiten Th8-f8 und g7-g5 ist in diesem Fall der Turmzug die günstigere, weil dadurch der Freizug 11... Sg8-e7 ermöglicht wird. Im 10. schwarzen Zug ist g7-g5 die einzige Möglichkeit, nur zwei Felder zu verlieren, und im 9. Zug ist die Rochade O-O-O erzwungen. Weiß nähme im 8. Zug gern den Springerzug Sb1-c3 zurück, weil dieser nur ein Feld verlöre; doch dann geriete er im weiteren Rückwärtsspiel im 6. Zug in Zugnot, weil der sLb4 die Rücknahme der weißen Rochade verhinderte. Deshalb muss der wS im Rückwärtsspiel auf c3 stehen bleiben. Die weitere Auflösung der Anfangsphase der Lösung ist dann klar und im übrigen auch bereits aus der Lösung der beiden Aufgabenstellungen A[22,5] und A[23,0] bekannt. Wir erhalten den Lösungsverlauf 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 g5 11. Te1 Sge7 12. Ta2 Thf8 13. Kh2 Sa5 14. Le3 Sf5 15. Lxg5 Sg7 16. Kg3 Lxc3 17. bxc3 f5 18. Tb2 Le8 19. Tbb1 Lh5 20. Te3 c4 21. Le2 h6 (21,0 Züge). Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-12, 16 und 19 exakt fest. Die letzten beiden Züge (Nr. 20+21) sind die beiden Bauernzüge c5-c4 und h7-h6 in beliebiger Reihenfolge. In den fünf Zügen Nr. 13-15 und 17-18 müssen einerseits das dreizügige Manöver Se7-f5-g7 und f7-f5 (in dieser Reihenfolge) und andererseits die zweizügige Zugfolge Sc6-a5 und La4-e8 (in dieser Reihenfolge) untergebracht werden; dafür sind grundsätzlich zehn Kombinationen denkbar, wobei allerdings der Springerzug Sf5-g7 außerdem im Lösungsverlauf vor wKh2-g3 stattfinden muss. Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-2, 5, 8 und 17-19 exakt fest. Die beiden Züge Nr. 3+4 sind untereinander vertauschbar, ebenso die beiden Züge Nr. 6+7. Für den Königszug Kg1-h2 wird wieder zuvor e4-e5 als Schachschutz benötigt. In den acht Zügen Nr. 9-16 ist das dreizügige Manöver aus e4-e5 und Kg1-h2-g3 unterzubringen, außerdem die beiden zweizügigen Zugfolgen a2-a3, Ta1-a2 und Lc1-e3-g5. Der Turmzug Tf1-e1 nimmt die letzte verbleibende Position unter den acht Zügen ein. Der Läuferzug Le3-g5 darf frühestens im 11. Zug stattfinden, da zuvor 10... g5 erforderlich ist. Der Königszug Kh2-g3 ist frühestens im 15. Zug möglich, weil davor sSe7-f5-g7 erforderlich ist und Schwarz diese beiden Züge frühestens im 13. und 14. Zug spielt. Für die Kombination aus den acht weißen Zügen Nr. 9-16 und den fünf schwarzen Zügen Nr. 13-15 und 17-18 können wir zwei Fälle unterscheiden:

- Wenn 15. Kg3, so muss zuvor 13... Se7-f5 und 14... Sf5-g7 geschehen. In den drei verbleibenden schwarzen Zügen Nr. 15 und 17-18 kann der Zug f7-f5 beliebig untergebracht werden, und die beiden übrigen schwarzen Züge stehen dann fest (Sc6-a5 und La4-e8). Bei den weißen Zügen unterscheiden wir nochmals zwei Fälle:
  - o Wenn der Läuferzug Le3-g5 vor dem 15. Zug stattfindet, so muss er in einem der vier Züge Nr. 11-14 gespielt werden. Zusammen mit dem davor erforderlichen Zug Lc1-e3 gibt es dann  $2+3+4+5 = 14$  Kombinationen für die Positionen dieser beiden Läuferzüge;

unter den verbleibenden vier Zügen in der Phase der Züge Nr. 9-14 können die beiden Züge e4-e5 und Kg1-h2 auf sechs Arten untergebracht werden; in den verbleibenden drei Zügen in der Phase der Züge Nr. 9-16 kann die Position für Tf1-e1 beliebig gewählt werden; und die beiden übrigen Züge stehen dann fest (a2-a3 und Ta1-a2).

- Wenn andererseits 16. Le3-g5, dann kann der Zug Tf1-e1 unter den sechs Zügen Nr. 9-14 beliebig untergebracht werden und der Zug Lc1-e3 ebenfalls beliebig unter den verbleibenden fünf Zügen. In den danach verbleibenden vier Zügen gibt es sechs Kombinationen für die beiden Züge e4-e5 und Kg1-h2, und die übrigen beiden Zügen stehen dann fest (a2-a3 und Ta1-a2).
- Wenn 16. Kg3, so muss bei Schwarz die dreizügige Zugfolge aus Se7-f5-g7 und f7-f5 so auf die fünf Züge Nr. 13-15 und 17-18 verteilen, dass der mittlere Zug Sf5-g7 spätestens im 15. Zug geschieht. Hierfür gibt es  $3 + 2 \cdot 2 = 7$  Möglichkeiten. Die übrigen beiden schwarzen Züge stehen dann fest (Sc6-a5 und La4-e8). Bei Weiß muss der Läuferzug Le3-g5 in einem der fünf Züge Nr. 11-15 gespielt werden, und zusammen mit dem vorhergehenden Zug Lc1-e3 gibt es dafür  $2+3+4+5+6 = 20$  Kombinationen. Unter den fünf verbleibenden Zügen kann der Zug Tf1-e1 beliebig untergebracht werden, und unter den vier verbleibenden Zügen gibt es sechs Kombinationen für die Positionen der beiden Züge e4-e5 und Kg1-h2. Die übrigen beiden Züge stehen fest (a2-a3 und Ta1-a2).

Für die Kombination aus den acht weißen Zügen Nr. 9-16 und den fünf schwarzen Zügen Nr. 13-15 und 17-18 erhalten wir damit  $3 \cdot (14 \cdot 6 \cdot 3 + 6 \cdot 5 \cdot 6) + 7 \cdot 20 \cdot 5 \cdot 6 = 5.496$  Möglichkeiten. Für die gesamte Zugfolge des Lösungsverlaufs mit Ausnahme der beiden letzten weißen Züge gibt es 43.968 Kombinationen.

Die beiden weißen Abwartezüge am Ende des Lösungsverlaufs müssen von den fünf Steinen Dg4, Te1, Ld3, Sf3, Bf2 absolviert werden. Zur Verfügung stehen dafür die Züge Dg4-h3-h2, Te1-e3-e1, Te1-e2, Ld3-e2, Sf3-d2-f1 und f2-f3. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

Dg4	Te1	Ld3	Sf3	Bf2	Verläufe	Schlussstellungen
2	-	-	-	-	1	1
1	1	-	-	-	4	2
1	-	1	-	-	2	1
1	-	-	1	-	2	1
-	2	-	-	-	1	1
-	1	1	-	-	1	1
-	1	-	1	-	4	2
-	-	1	1	-	2	1
-	-	-	2	-	1	1
-	-	-	1	1	1	1

Für die beiden letzten weißen Züge gibt es damit 19 verschiedene Kombinationen. Insgesamt erhalten wir 835.392 optimale Lösungen und zwölf verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 19. Zug von Schwarz erreicht.

### A[39,0]

Der 39. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die optimalen Lösungen keine Rolle. Es ändert sich nichts.

### A[39,5]

Der 40. weiße Zug besucht mit c1, d1 und h1 gleich drei neue Felder, und wir erhalten  $F[39,5] = 52$ . Der Turmzug wTb1-h1 wird für die Lösung benötigt, und zur Vorbereitung muss der weiße Königsturm die 1. Reihe durch einen der beiden Züge Te1-e2 oder Te1-e3 räumen. Dieser Räumungszug ist ein Freizug. Die optimale Lösung besteht weiterhin aus 21,0 Zügen, aber diesmal gibt es am Ende der Lösung keine Abwartezüge mehr. Weiß versucht im Rückwärtsspiel aus der Schlussstellung heraus möglichst lange den Turmzug Tb1-h1 zu vermeiden, da dieser drei Felder verliert. Dafür stehen allerdings nur die beiden Züge Kh2-g3 und Le3xg5 zur Verfügung, die deshalb im 20.+21. weißen Zug gespielt werden müssen (in beliebiger Reihenfolge). Es folgt, dass der Räumungszug des Königsturms Te1-e2 lauten muss. Im 19. weißen Zug ist Tb1-h1 erzwungen, und davor ist der Freizug 18. Te1-e2 möglich. Im weiteren Rückwärtsspiel peilt Weiß durch 17. Tb2-b1 und 16. Ta2-b2 den Freizug 15. b2xc3 an. Die weitere Rücknahme der weißen Züge folgt dann bekannten Mustern, mit dem einzigen Unterschied, dass der Zug Kh2-g3 nicht mehr dabei ist. Auch die schwarzen Manöver verlaufen wie gewohnt, wobei aber die Position des Freizugs Lb4xc3 an die neue, frühere Position des weißen Bauernschlags b2xc3 in der Zugreihenfolge angepasst werden muss. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 g5 11. Te1 Sge7 12. Ta2 Thf8 13. Kh2 Sa5 14. Le3 Lxc3 15. bxc3 Sf5 16. Tb2 Sg7 17. Tbb1 f5 18. Te2 Le8 19. Th1 Lh5 20. Kg3 c4 21. Lxg5 h6 (21,0 Züge).

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-12, 14 und 19 exakt fest. In den fünf Zügen Nr. 13 und 15-18 müssen die drei Züge Se7-f5-g7 und f7-f5 (in dieser Reihenfolge) und die beiden Züge Sc6-a5 und La4-e8 (in dieser Reihenfolge) untergebracht werden; dafür gibt es zehn verschiedene Kombinationen. Die beiden letzten schwarzen Züge (Nr. 20+21) sind vertauschbar. Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-2, 5, 8 und 15-19 exakt fest. Die beiden Züge Nr. 3+4 sind vertauschbar, ebenso die beiden Züge Nr. 6+7. In den sechs Zügen Nr. 9-14 müssen die beiden Züge a2-a3 und Ta1-a2 in dieser Reihenfolge gespielt werden und die beiden Züge e4-e5 und Kg1-h2 ebenfalls in dieser Reihenfolge. Die beiden verbleibenden Züge Tf1-e1 und Lc1-e3 können beliebig eingeschoben werden. Dafür gibt es  $6 \cdot 5 \cdot 6 = 180$  Kombinationen. Die beiden Züge Nr. 20+21 sind vertauschbar. Wir erhalten 28.800 optimale Lösungen, und die Schlussstellung ist eindeutig.

### A[40,0]

Der 40. schwarze Zug besucht das neue Feld h7, und wir erhalten  $F[40,0] = 53$ . Für die Lösung wird der schwarze Turmzug Tf7-h7 benötigt, und zu dessen Vorbereitung auch das Manöver Tf8-f6-f5-f7. Wir erhalten also vier neue schwarze Turmzüge, die zwingend erforderlich sind. Im Gegenzug können wir das Springermanöver Se7-f5-g7 und den Läuferzug Le8-h5 einsparen. Bei Schwarz sind die 21 Züge O-O-O, Dd8-c7, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6-a5, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6 zwingend erforderlich, und hinzu kommt noch ein weiterer Zug für den Besuch auf e8 (entweder Td8-f8 oder La4-e8). Der Bauernzug f7-f5 findet vor Tf8-f6 statt und damit auch vor Tf6-f5. Zwischen den beiden Zügen f7-f5 und Tf6-f5 muss Weiß im Lösungsverlauf den sBf5 schlagen (durch Lg4xf5 oder durch e5xf6 e.p.).

Jede Lösung muss also mindestens 22,0 Züge umfassen. Wir werden allerdings in der Folge noch nachweisen, dass 22,0 Züge nicht ausreichen – und auch in 22,5 Zügen geht es noch nicht. Wie wir sehen werden, ist die folgende Lösung optimal:

1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8  
11. Te1 g5 12. Ta2 h6 13. Le3 f5 14. exf6 Lxc3 15. bxc3 Txf6 16. Tb2 Tf5 17. Tbb1 Dh2+ 18. Kxh2 Tf7  
19. Te2 Tfh7 20. Th1 Sa5 21. h5 c4 22. Sxg5 Se7 23. Sf3 Tf8 (23,0 Züge).

Es gibt also jedenfalls eine Lösung in 23,0 Zügen, die im letzten Einzelzug (im 23. Zug von Schwarz) nur ein Feld verliert und in den drei letzten Einzelzügen davor (23. und 22. Zug von Weiß, 22. Zug von Schwarz) Freizüge enthält.

Weiß muss in jeder Lösung den Zug Tb1-h1 spielen, und um diesen Zug zu ermöglichen, sind zur Vorbereitung 17 weitere weiße Züge zwingend erforderlich: O-O, Kg1-h2, Dd1-g4, Ta1-a2-b2-b1, Tf1-e1-e2/e3, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4, h2-h4. Wir kennen also 18 weiße Züge, von denen der letzte kein Freizug ist.

Wenn es eine Lösung gäbe, in der Schwarz nur 22mal zieht, so müssten dies die 22 schwarzen Züge sein, die wir oben bereits aufgezählt haben. Dann müsste Weiß die Besuche auf den Feldern g3, f4, e5 und h5 übernehmen, und dazu wären neben den bereits bekannten 18 weißen Zügen noch vier weitere erforderlich (Kh2-g3, e4-e5, entweder Le3-g5 oder f3-f4, entweder h4-h5 oder Le2-h5). Darüber hinaus würde Weiß auch noch einen Zug für den Schlag des sBf5 benötigen. Damit hätten wir dann schon 23 weiße Züge – die Lösung müsste also aus genau 22,5 Zügen bestehen. Da kein weißer Zug mehr frei wäre, müsste der Besuch auf f4 dann durch Le3-g5 geschehen (f2-f3-f4 benötigt einen zusätzlichen Zug), und der Schlag des sBf5 müsste durch e5xf6 erfolgen. Doch dann wären in der Schlussstellung die Felder d6, e5 und f4 alle frei, und der wKg3 stünde im Schach der sDc7 – mit Schwarz am Zug. Dieser Widerspruch zeigt, dass tatsächlich 23 schwarze Züge erforderlich sind.

Jede optimale Lösung muss also aus genau 23,0 Zügen bestehen. Außerdem zeigt das Beispiel der oben angegebenen Lösung, dass in einer optimalen Lösung der letzte Zug nur ein Feld verlieren darf und dass davor drei Freizüge erforderlich sind (zwei weiße und ein schwarzer). Der Turmzug Tf7-h7 verliert das Feld h7 und außerdem auch das Feld g7, da für das Manöver Se7-f5-g7 nicht genug Züge zur Verfügung stehen. Deshalb kann Tf7-h7 nicht im 22. oder 23. Zug geschehen. Das dreizügige Manöver Tf6-f5-f7-h7 beginnt also spätestens im 19. schwarzen Zug, und deshalb muss Weiß auch den sBf5 spätestens im 19. Zug schlagen.

Käme nun in der optimalen Lösung nicht der schwarze Damenzug Dc7-h2 vor, so müsste Weiß wieder die Felder g3, f4 und e5 besuchen. Zu den bereits bekannten 18 weißen Zügen kämen dann noch drei weitere hinzu (Kh2-g3, e4-e5 sowie entweder Le3-g5 oder f3-f4). Der letzte dieser insgesamt 21 Züge wäre kein Freizug. Da aber zusätzlich unter den ersten 19 weißen Zügen auch noch der Schlag e5xf6 oder Lg4xf5 vorkommen muss, können wir nun schließen, dass die beiden letzten weißen Züge (Züge Nr. 22+23) nicht beide Freizüge wären. Dieser Widerspruch zeigt, dass in der optimalen Lösung der Damenzug sDc7-h2 vorkommen muss.

Die einzige Möglichkeit für Schwarz, im vorletzten Zug einen Freizug unterzubringen, besteht in dem Manöver 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7. Daraus folgt, dass die Wanderung Tf8-f6-f5-f7-h7 vom Damenturm unternommen werden muss, und hierfür wird der Zug Td8-f8 benötigt. Die 23 schwarzen Züge stehen damit (bis auf die Reihenfolge) eindeutig fest.

Weiß muss unmittelbar nach Dc7-h2 die sD durch Kg1xh2 schlagen. Weiterhin muss Weiß das Feld h5 besuchen (h4-h5 oder Le2-h5). Wir haben damit 19 weiße Züge, deren letzter kein Freizug ist. Hinzu kommen mindestens zwei Züge für den Schlag des sBf5 (e4-e5xf6 oder Lh5-g4xf5), und diese beiden Züge müssen spätestens mit dem 19. Zug abgeschlossen sein. Da die beiden letzten weißen Züge Freizüge sind, können wir nun schließen, dass die ersten 21 weißen Züge aus den 18 oben bereits aufgelisteten Zügen, genau einem Zug für den Besuch auf h5 und genau zwei Zügen für den Schlag des sBf5 bestehen. Für das Manöver Ld3-e2-h5 stehen nicht genug Züge zur Verfügung, so dass für

den Besuch auf h5 der Zug h4-h5 erforderlich ist und für den Schlag des sBf5 die beiden Züge e4-e5xf6. Da der Damenläufer nach Lc1-e3 auf dem Feld e3 stehen bleibt, besteht für den Räumungszug des Königsturms (zur Räumung der ersten Reihe) nur die Möglichkeit Te1-e2. Die ersten 21 weißen Züge stehen damit (bis auf die Reihenfolge) exakt fest. Die beiden letzten weißen Züge sind beliebige Abwartezüge.

Der weitere Lösungsverlauf ergibt sich nun nach gewohntem Muster durch Rückwärtsspiel aus der Schlussstellung. Die beiden schwarzen Züge 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7 bilden die einzige Möglichkeit, im 22. Zug von Schwarz einen Freizug auszuführen. Weiß spielt im 23. und 22. Zug zwei Freizüge als Abwartezüge. Im 21. und 20. Zug stehen Schwarz zwei Züge zur Verfügung, die genau ein Feld verlieren. Weiß spielt im 21. Zug den einzigen Zug, der nur ein Feld verliert, und ist dann im 20. Zug zu der Rücknahme 20. Tb1-h1 gezwungen. Ebenso hat Schwarz im 19. Zug die einzige Möglichkeit 19... Tf7-h7. Weiß nimmt im 19. und 18. Zug zwei Freizüge zurück und wählt dabei die Reihenfolge so, dass Kg1xh2 im Partieverlauf früher geschieht und damit die schwarze Antwort Dc7-h2+ erst im 17. Zug erzwingt. Schwarz kann dazwischen im 18. Zug und dann im weiteren Verlauf des Rückwärtsspiels auch im 16. Zug jeweils einen eindeutigen Freizug zurücknehmen. Weiß verliert im 17. und 16. Zug jeweils ein Feld und bereitet damit im Rückwärtsspiel die Rücknahme des Freizugs b2xc3 vor. Schwarz hat im 15. die Wahl zwischen den beiden Zügen Tf8xf6 und h7-h6, die jeweils genau ein Feld verlieren. Unter diesen beiden Zügen setzt sich 15... Tf8xf6 durch, weil dieser im Rückwärtsspiel den weißen Freizug e5xf6 ermöglicht. Weiß entscheidet sich im 15. Zug unter zwei Freizügen zunächst für b2xc3, weil e5xf6 im Rückwärtsspiel die schwarze Antwort f7-f5 erzwingen würde. Vor 15. b2xc3 kann Schwarz nun zunächst den Freizug 14... Lb4xc3 zurücknehmen, bevor es dann schließlich mit 14. e5xf6 und 13... f7-f5 weitergeht. Weiß verliert nun in den fünf Zügen Nr. 9-13 jeweils genau ein Feld, während Schwarz zunächst im 12. Zug genau ein Feld verliert und dann in den beiden Zügen Nr. 10+11 jeweils genau zwei Felder. Die Anfangsphase der Partie ist aus den optimalen Lösungen der vorangegangenen Aufgabenstellungen bereits bekannt.

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-9, 12-19 und 22-23 exakt fest. Lediglich die beiden Zugpaare Nr. 10+11 und 20+21 sind jeweils vertauschbar. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-2, 5, 8 und 14-21 exakt festgelegt. Die beiden Zugpaare Nr. 3+4 und Nr. 6+7 sind jeweils vertauschbar. Außerdem ist die Reihenfolge der fünf Züge Nr. 9-13 frei wählbar, mit der einzigen Nebenbedingung, dass a2-a3 vor Ta1-a2 geschieht. Für diese fünf weißen Züge gibt es damit 60 Kombinationen. Die beiden weißen Abwartezüge am Ende des Lösungsverlaufs müssen von den fünf Steinen Kh2, Dg4, Le3, Sf3, Bf2 absolviert werden. Zur Verfügung stehen dabei die Züge Kh2-g3, Dg4-h3-h2, Le3-g5, Sf3-g5-f3, Sf3-d2-f1 und f2-f3. Wir erhalten die folgenden Kombinationen für die beiden weißen Abwartezüge:

Kh2	Dg4	Le3	Sf3	Bf2	Verläufe	Schlussstellungen
1	1	-	-	-	2	1
1	-	1	-	-	2	1
1	-	-	1	-	4	2
-	2	-	-	-	1	1
-	1	1	-	-	2	1
-	1	-	1	-	4	2
-	-	1	1	-	2	1
-	-	-	2	-	2	2
-	-	-	1	1	2	2

Für die Schlussphase gibt es damit 21 verschiedene Verläufe. Insgesamt gibt es 20.160 optimale Lösungen und 13 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

## A[40,5]

+Der 41. weiße Zug besucht das neue Feld f2, und wir erhalten  $F[40,5] = 54$ . Der weiße Königszug Kg3-f2 wird für die Lösung benötigt. Zusätzlich zu dem Zug Tb1-h1 und den 17 dafür erforderlichen Vorbereitungszügen, die wir bereits kennen, muss Weiß nun noch die beiden Königszüge Kh2-g3-f2 spielen sowie zur Vorbereitung außerdem f2-f3. Da mit Sg1-f3 und f2-f3 zwei weiße Steine nach f3 ziehen, muss weiterhin der erste dieser beiden Steine das Feld auch wieder verlassen – durch Sf3-g5, Sf3-d2 oder f3-f4. Schließlich muss Weiß auch noch den sBf5 schlagen und benötigt dafür mindestens zwei zusätzliche Züge. Die Lösung umfasst damit nun schon mindestens 24 weiße Züge, d.h. die Partie muss aus mindestens 23,5 Zügen bestehen. Wie wir sehen werden, ist diese Zügezahl tatsächlich umsetzbar. Wenn mir mit 24 weißen Zügen auskommen wollen, ist das Manöver Ld3-e2-h5-g4-f5 zu langwierig, d.h. der sBf5 muss durch e4-e5xf6 geschlagen werden. Der weiße Damenläufer bleibt nach seinem Zug Lc1-e3 auf dem Feld e3 stehen, und deshalb kann der Königsturm die erste Reihe nur durch den Zug Te1-e2 räumen. Von den 24 weißen Zügen stehen damit bereits 23 exakt fest, und der letzte verbleibende muss einer der drei Züge Sf3-g5, Sf3-d2, f3-f4 sein. Weiß besucht nicht das Feld h5, und deshalb muss Schwarz dies übernehmen – durch Le8-h5 oder h6-h5. Bei Schwarz stehen 21 Züge exakt fest, und hinzu kommt noch je ein weiterer Zug für den Besuch auf e8 (Td8-f8 oder La4-e8) und für den Besuch auf h5 (Le8-h5 oder h6-h5). Der Damenzug Dc7-h2 kann damit nicht in der Lösung vorkommen, und deshalb muss Weiß das Feld f4 besuchen – nämlich durch f3-f4. Alle 24 weißen Züge stehen damit fest (bis auf die Reihenfolge); und weil f3-f4 vor Sg1-f3 geschieht und damit auch vor O-O, bildet der wBf4 einen soliden Schachschutz für die Manöver auf der Diagonalen c7-h2. Bei Schwarz besteht wieder die bereits gut bekannte einzige Möglichkeit, im 22. Zug einen Freizug zu spielen: 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7. Daraus folgt, dass das Manöver Tf8-f6-f5-f7-h7 vom Damenturm ausgeführt werden muss, so dass der Zug Td8-f8 benötigt wird. Der Zug La4-e8 scheidet damit aus, und somit auch Le8-h5. Das Feld h5 wird durch h6-h5 besucht.

Zum ersten Mal seit A[20,5] haben wir wieder eine optimale Lösung gefunden, in der der letzte Zug von Weiß ausgeführt wird. Sämtliche Züge von Weiß und Schwarz stehen bis auf die Reihenfolge fest. Der konkrete Lösungsverlauf ergibt sich wieder durch sukzessive Rücknahme von Zügen aus der Schlussstellung heraus. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. f3 c5 7. f4 Dc7 8. Sf3 Sc6 9. Ld3 O-O-O 10. O-O Tf8 11. e5 g5 12. a3 h6 13. Te1 f5 14. exf6 Txf6 15. Ta2 Lxc3 16. Kh2 Tf5 17. Le3 Tf7 18. bxc3 Tfh7 19. Tb2 Sa5 20. Tbb1 c4 21. Te2 h5 22. Th1 Se7 23. Kg3 Tf8 24. Kf2 (23,5 Züge).

Weiß verfügt am Partieende nur über die beiden Züge 24. Kg3-f2 und 23. Kh2-g3, die beide jeweils ein Feld verlieren. Im weiteren Rückwärtsspiel ist dann 22. Tb1-h1 erzwungen. Davor ist 21. Te1-e2 der einzige Freizug, und dann folgt im Rückwärtsspiel die Zugfolge 20. Tb2-b1 und 19. Ta2-b2, die den Freizug 18. b2xc3 vorbereitet. Schwarz nimmt am Partieende wie gewohnt zunächst 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7 zurück. Davor kommen in den drei Zügen Nr. 19-21 drei Züge, die jeweils genau ein Feld verlieren. Im 18. Zug ist Tf7-h7 erzwungen, und in den drei Zügen Nr. 15-17 gibt es dann drei Freizüge. Zwei dieser Freizüge wurden durch 18... Tf7-h7 ermöglicht und der dritte durch 18. b2xc3. Im 14. schwarzen Zug fällt zwischen den beiden Möglichkeiten Tf8xf6 und h7-h6 wieder die Wahl auf den Turmzug, weil dieser den weißen Freizug e5xf6 möglich macht. Weiß verliert in den sechs Zügen Nr. 11-13 und 15-17 jeweils genau ein Feld; diese Zugfolge wird durch den Freizug 14. e5xf6 unterbrochen. Als Antwort auf 14. e5xf6 ist im Rückwärtsspiel 13... f7-f5 erzwungen. Die ersten zwölf schwarzen Züge kennen wir bereits aus den Lösungen der vorangegangenen Aufgabenstellungen. Bei Weiß muss die Rochade O-O jetzt schon im 10. Zug zurückgenommen werden (statt wie bisher im 8.

Zug), weil vor Sg1-f3 im Partieverlauf die beiden Bauernzüge f2-f3-f4 eingeschoben wurden. Im 8.+9. Zug macht Weiß die beiden gewohnten Freizüge, und im 6.+7. ist dann das Manöver f2-f3-f4 nötig, das den Freizug f2-f3 beinhaltet. Die ersten fünf weißen Züge kennen wir bereits aus den früheren optimalen Lösungen.

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-9, 12-14, 18 und 22-23 exakt fest. Die beiden Züge Nr. 10+11 sind vertauschbar. In den drei Zügen Nr. 15-17 ist die Position des Läuferzugs Lb4xc3 beliebig, und die beiden anderen Züge sind Tf6-f5-f7 (in dieser Reihenfolge) – dafür gibt es also drei mögliche Kombinationen. Die Reihenfolge der drei Züge Nr. 19-21 ist komplett frei (sechs Kombinationen).

Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-2, 5-7, 10, 14 und 18-24 eindeutig. Die beiden Zugpaare Nr. 3+4 und Nr. 8+9 sind jeweils vertauschbar. Die Reihenfolge der sechs Züge Nr. 11-13 und 15-17 ist grundsätzlich frei, wobei allerdings a2-a3 vor Ta1-a2 stattfinden und außerdem der Zug e4-e5 bereits in den drei Zügen Nr. 11-13 vorkommen muss. Es gibt also drei mögliche Positionen für e4-e5, dann noch fünf Positionen für Kg1-h2, dann vier Positionen für Tf1-e1, dann drei Positionen für Lc1-e3, und die Reihenfolge der beiden verbleibenden Züge a2-a3 und Ta1-a2 steht fest. Das ergibt 180 Kombinationen für die sechs weißen Züge Nr. 11-13 und 15-17. Insgesamt erhalten wir 25.920 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

#### **A[41,0]**

Der 41. schwarze Zug besucht das neue Feld b6, und wir erhalten  $F[41,0] = 55$ . Für die Lösung der Aufgabenstellung A[41,0] wird der schwarze Königszug Kc7-b6 benötigt, und zur Vorbereitung ist das Manöver Kc8-b8-c7 erforderlich. Da außerdem sDd8-c7 bereits vor sO-O-O geschieht, muss die sD das Feld c7 für den Marsch des sK räumen, so dass in der Partie auch der Zug Dc7-h2 benötigt wird. Damit kennen wir 25 schwarze Züge, die in der Partie zwingend vorkommen müssen: O-O-O, Kc8-b8-c7-b6, Dd8-c7-h2, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6-a5, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Für den Besuch auf e8 wird noch ein weiterer Zug benötigt (Td8-f8 oder La4-e8). Die Partie umfasst damit mindestens 26,0 Züge. Wie wir sehen werden, ist diese Zügezahl tatsächlich darstellbar. Schwarz hat dann keine Zeit für einen Besuch auf h5, so dass Weiß diese Aufgabe übernehmen muss. Bei Weiß sind zunächst 20 Züge exakt bekannt: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2-b2-b1-h1, Tf1-e1, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4, f2-f3, h2-h4. Hinzu kommt ein Zug des Te1 zur Räumung der ersten Reihe (Te1-e2/e3), ein Zug zur Räumung des Feldes f3 (Sf3-g5, Sf3-d2 oder f3-f4) und ein Zug für den Besuch auf h5 (h4-h5 oder Le2-h5). Der letzte der bisher aufgezählten 23 weißen Züge im Lösungsverlauf ist kein Freizug. Weiterhin muss Weiß auch noch den sBf5 schlagen und benötigt dafür zwei zusätzliche Züge (e4-e5xf6 oder Lh5-g4xf5). Nach dem Schlag des sBf5 macht Schwarz noch mindestens drei Züge (Tf6-f5-f7-h7), so dass der Schlag spätestens im 24. Zug erfolgen muss. Es ist damit nicht möglich, dass dieser Bauernschlag im Lösungsverlauf nach den oben bereits erwähnten 23 Zügen stattfindet, und deshalb haben wir nun schon 25 weiße Züge identifiziert, deren letzter kein Freizug ist. Weiß verfügt damit am Partieende über höchstens einen Freizug (im 26. Zug), und dies ist nicht der Schlag des sBf5. Weiß macht im 26. Zug einen beliebigen Abwartezug, und die ersten 25 weißen Züge der Lösung stehen dann grundsätzlich fest. Für das Manöver Ld3-e2-h5-g4-f5 stehen nicht mehr genug Züge zur Verfügung, so dass notwendig e4-e5xf6 geschehen muss und der Besuch auf h5 außerdem durch h4-h5 erfolgt. Da der Damenläufer nach Lc1-e3 auf dem Feld e3 stehenbleibt, muss der Räumungszug des Te1 außerdem der Zug Te1-e2 sein. Damit sind nun bereits 24 der ersten 25 weißen Züge exakt bekannt (bis auf die Reihenfolge); nur der Räumungszug für das Feld f3 ist noch offen. Der Zug f3-f4 scheidet hierfür allerdings aus: Käme unter den ersten 25 weißen Zügen f3-f4 vor, so müsste dieser Bauernzug vor Sg1-f3 geschehen und damit auch vor O-O und Kg1-h2. Der wB bliebe bis zum 25. Zug

auf dem Feld f4 stehen und würde damit die Diagonale für den Damenzug sDc7-h2 verstellen. Nach dem 25. Zug (d.h. im 26. Zug) ist sDc7-h2 nicht mehr möglich, weil ja nach diesem Damenzug noch sKb8-c7-b6 geschieht. Also müsste dann sDc7-h2 schon vor f3-f4 geschehen und damit auch vor wO-O. Die sDh2 würde dann allerdings die weiße Rochade verhindern – Widerspruch. Also können wir schließen, dass im Lösungsverlauf wSg1-f3 vor f2-f3 erfolgt und der wS das Feld f3 für den wB räumt. Der Räumungszug (Sf3-g5 oder Sf3-d2) ist in jedem Fall ein Freizug: Geschähe nämlich Sf3-g5 vor g7-g5, so müsste der wS das Feld g5 für den sB wieder räumen, und das wäre erst im 26. Zug möglich; aber g7-g5 muss natürlich vor dem 26. Zug gespielt werden, weil danach ja noch sTf7-h7 kommt. Geschähe wiederum Sf3-d2 vor Lc1-e3, so würde der Sd2 danach den Läuferzug Lc1-e3 verhindern.

Da Weiß nicht f3-f4 spielt, verliert sDc7-h2 mindestens das Feld f4, d.h. dieser Damenzug ist kein Freizug. Schwarz kann damit am Parteeende vor dem letzten Zug höchstens zwei Freizüge in Folge erreichen, nämlich durch 26... Kc7-b6, 25... Kb8-c7 und 24... Kc8-b8. Davor gibt es wieder die bereits bekannte Möglichkeit, durch 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7 einen weiteren Freizug zu schaffen. Das Manöver Tf8-f6-f5-f7-h7 wird also wieder vom Damenturm ausgeführt, und deshalb ist der letzte noch offene schwarze Zug notwendig Td8-f8. Wir erhalten die folgende Lösung:

1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 h6 13. Le3 f5 14. exf6 Lxc3 15. bxc3 Txf6 16. Tb2 Tf5 17. Tbb1 Dh2+ 18. Kxh2 Tf7 19. Te2 Tfh7 20. Th1 Sa5 21. h5 c4 22. Sxg5 Se7 23. f3 Tf8 24. Kg3 Kb8 25. Kf2 Kc7 26. Dh3 Kb6 (26,0 Züge).

Die letzten fünf schwarzen Züge (Nr. 22-26) wurden bereits beschrieben. Weiß macht im 26. Zug einen Abwartezug und nimmt davor im 25. Zug den Königszug Kg3-f2 zurück, der selbst ein Feld verliert und drei weiße Freizüge möglich macht (Kh2-g3, f2-f3 und den Räumungszug Sf3~). Diese drei Freizüge werden in den Zügen Nr. 22-24 ausgeführt. Der Verlauf der ersten 21,0 Züge der Lösung ist identisch mit der Lösung zur Aufgabenstellung A[40,0] von oben.

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-9, 12-19 und 22-26 exakt fest. Die beiden Zugpaare Nr. 10+11 und 20+21 sind jeweils vertauschbar. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-2, 5, 8, 14-21 und 25 exakt festgelegt. Die beiden Zugpaare Nr. 3+4 und Nr. 6+7 sind jeweils vertauschbar. Für die fünf Züge Nr. 9-13 gibt es 60 Kombinationen. In den drei Zügen Nr. 22-24 ist zunächst zu beachten, dass es für den Räumungszug des Sf3 zwei Möglichkeiten gibt (Sf3xg5 und Sf3-d2). Der Springerzug erfolgt vor dem Zug f2-f3, und der Königszug Kh2-g3 kann an beliebiger Position eingeschoben werden. Das ergibt sechs Kombinationen für diese drei Züge (davon drei mit Sg5 und drei mit Sd2). Für den weißen Abwartezug im 26. Zug gibt es stets die beiden Möglichkeiten Dg4-h3 und f3-f4. Hinzu kommen im Fall von wSd2 noch die beiden weiteren Optionen Le3xg5 und Sd2-f1. Im Fall von wSg5 gibt es außer Dh3 und f4 keine weiteren Möglichkeiten für den 26. weißen Zug. Wir erhalten im Fall von Sf3-d2 nun 11.520 optimale Lösungen, im Fall von Sf3xg5 sind es 5.760 Stück. Insgesamt ergeben sich damit 17.280 optimale Lösungen und sechs verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

#### **A[41,5]**

Der 42. weiße Zug besucht kein neues Feld und kann die Lösung nicht verbessern. Der Bauernzug g2-g3 kann allerdings im 26. Zug der Lösung als zusätzlicher Abwartezug eingesetzt werden. Es kommen 5.760 weitere optimale Lösungen und zwei Schlussstellungen hinzu. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen steigt damit auf 23.040, die der Schlussstellungen auf acht. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[42,0] bis A[45,0]**

Der 42. schwarze Zug besucht keine neuen Felder und spielt für die optimalen Lösungen keine Rolle. Eine Ersetzung des Zuges sSc6-a5 durch sKb6-a5 im Lösungsverlauf kommt nicht in Frage, weil dann die beiden schwarzen Freizüge in den Zügen Nr. 24+25 nicht mehr erreichbar wären. Deshalb ändert sich an den optimalen Lösungen nichts. Dies gilt ebenso für alle nachfolgenden Züge der Partie *CarCar* bis zum 45. schwarzen Zug (einschließlich).

### **A[45,5]**

Der 46. weiße Zug besucht kein neues Feld und kann die Lösung nicht verbessern. Der Turmzug Th1-b1 kann aber im 26. Zug der Lösung als zusätzlicher Abwartzug eingesetzt werden. Es kommen nochmals 5.760 optimale Lösungen und zwei Schlussstellungen hinzu. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen steigt damit auf 28.800, die der Schlussstellungen auf zehn. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

Von den 90,5 Zügen der Partie *CarCar* ist jetzt die Hälfte abgearbeitet. Von den 60 Feldern, die in der Partie *CarCar* besucht werden, fehlen nur noch fünf: a1, c2, g2, a6, b6.

### **A[46,0]**

Durch den 46. schwarzen Zug ändert sich nichts.

### **A[46,5]**

Der 47. weiße Zug besucht kein neues Feld und kann die Lösung nicht verbessern. Der Turmzug Te2-e1 kann aber im 26. Zug der Lösung als zusätzlicher Abwartzug eingesetzt werden. Es kommen nochmals 5.760 optimale Lösungen und zwei Schlussstellungen hinzu. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen steigt auf 34.560, die der Schlussstellungen auf zwölf. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 21. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[47,0]**

Durch den 47. schwarzen Zug ändert sich nichts. Der Versuch, anstelle des sK den sT nach b6 zu führen, gelingt nicht: Es ließen sich nur die drei Königszüge Kc8-b8-c7-b6 einsparen, dafür würden aber mit Tf8-e8-c8-c6-b6 vier zusätzliche Turmzüge benötigt. Der Damenzug Dc7-h2 wäre nach wie vor erforderlich, um den Turm durchzulassen.

### **A[47,5]**

Der 48. weiße Zug besucht das neue Feld b3, und wir erhalten  $F[47,5] = 56$ . Im Verlauf der Partie *CarCar* fehlen nur noch die vier Felder a1, c2, g2 und a6. Für die Lösung der Aufgabenstellung A[47,5] wird der weiße Turmzug Tb1-b6 benötigt, dazu außerdem als Vorbereitung der Zug Th1-b1. Wir kennen 22 weiße Züge, die zwingend in der Lösung vorkommen müssen: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2-b2-b1-h1-b1-b6, Tf1-e1, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4, f2-f3,

h2-h4. Hinzu kommt ein Turmzug zur Räumung der ersten Reihe (Te1-e2/e3), ein Räumungszug für das Feld f3 (Sf3-g5, Sf3-d2 oder f3-f4) und zwei Züge, um den sBf5 zu schlagen (e4-e5xf6 oder Lh5-g4xf5). Die Partie umfasst damit mindestens 26 weiße Züge. Da der Turmzug Tb1-b6 neben dem Feld b3 gleichzeitig auch b6 besucht, kann Schwarz sich die dreizügige Königswanderung Kc8-b8-c7-b6 nun sparen, und damit ist auch der Damenzug Dc7-h2 nicht mehr zwingend erforderlich. Es besteht also Grund zur Hoffnung, dass die Lösung mit 25,5 Zügen auskommt; und wie wir sehen werden, ist dies auch tatsächlich der Fall. Wir wollen also eine Lösung konstruieren, in der Weiß über die bereits erwähnten 26 Züge hinaus keine weiteren ausführt. Da der Damenläufer nach Lc1-e3 auf dem Feld e3 stehen bleibt, muss der Räumungszug für die erste Reihe dann Te1-e2 sein; und da das Läufermanöver Ld3-e2-h5-g4-f5 zu viele Züge verbrauchen würde, muss der Schlag des sBf5 durch e4-e5xf6 erfolgen. Wir kennen nun also schon 25 der 26 weißen Züge exakt, und nur der Räumungszug für f3 ist noch offen. Weiß hat keine Zeit, um das Feld h5 zu besuchen, und deshalb muss Schwarz diese Aufgabe übernehmen. Bei Schwarz haben wir die 20 zwingend erforderlichen Züge O-O-O, Dd8-c7, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6, und hinzu kommen noch je ein weiterer Zug für das Feld a5 (Sc6-a5 oder Kb6-a5), für das Feld e8 (Td8-f8 oder La4-e8) und für das Feld h5 (Le8-h5 oder h6-h5). Damit sind bisher 23 schwarze Züge verplant. Die Wanderung des sK nach a5 würde zu viele Züge verbrauchen, deshalb wird für das Feld a5 der Zug Sc6-a5 benötigt (wie gewohnt). Außerdem würde auch die Wanderung von sK oder sT nach b6 zu viele Züge verbrauchen, weshalb wir schließen können, dass der weiße Turmzug Tb1-b6 mindestens zwei Felder verliert (nämlich b3 und b6). Weiß nimmt deshalb im letzten Zug der Partie nicht diesen Turmzug zurück, sondern nutzt den einzigen anderen Zug, der ihm zur Verfügung steht: 26. Kg3-f2. Dieser Zug verliert ein Feld. Schwarz hat im 25. Zug Zeit für einen Freizug; hierfür steht aber keiner der 23 oben aufgezählten schwarzen Züge zur Verfügung, so dass der 25. schwarze Zug ein reiner Abwartezug sein muss. Die oben aufgezählten Züge müssen alle zu den ersten 24 schwarzen Zügen gehören. Im Rückwärtsspiel wollen wir nun als nächstes auch im 25. Zug von Weiß einen Freizug erreichen. Käme nun im Lösungsverlauf der Zug f2-f3 vor Sg1-f3, so wäre dies nicht möglich – denn dann müsste f3-f4 auch schon vor O-O erfolgen; dann könnte der Zug sDc7-h2 in der Partie nicht vorkommen; und dann gäbe es vor 26. Kg3-f2 für Weiß nur die beiden Rücknahmemöglichkeiten Kh2-g3 und Tb1-b6, die beide mindestens ein Feld verlören. Wenn wir im 25. weißen Zug einen Freizug erreichen wollen, dürfen wir deshalb davon ausgehen, dass Sg1-f3 im Lösungsverlauf vor f2-f3 geschieht. Der Räumungszug für das Feld f3 ist dann Sf3-g5 oder Sf3-d2, und wir können schließen, dass Weiß das Feld f4 nicht besucht. Wir brauchen deshalb im Lösungsverlauf den schwarzen Damenzug Dc7-h2, und damit stehen nun die ersten 24 schwarzen Züge grundsätzlich fest – darunter 22 exakt und zwei weitere für die Besuche auf e8 und h5. Im 25. weißen Zug haben wir nun einen der beiden Freizüge Kh2-g3 und f2-f3. Im 24. Zug von Schwarz erweist es sich wieder (wie gewohnt) als das günstigste Vorgehen, den Zug 24... Th8-f8 zurückzunehmen, um damit den Freizug 23... Sg8-e7 zu ermöglichen. Daraus folgt wieder, dass die Turmwanderung nach h7 vom Damenturm ausgeführt wird und dass die beiden noch offenen schwarzen Züge Td8-f8 und h6-h5 lauten müssen. Weiß nimmt in den drei Zügen Nr. 23-25 insgesamt drei Freizüge zurück (Kh2-g3, f2-f3 und Sf3~). Davor ist für Weiß das dreizügige Turmmanöver 20.-22. Tb1-h1-b1-b6 erzwungen. Schwarz nimmt in den drei Zügen Nr. 20-22 die drei Züge Sc6-a5, c5-c4 und h6-h5 zurück, die jeweils genau ein Feld verlieren. Die Position nach dem 19. Zug vom Schwarz ist dann dieselbe wie in den Lösungen zu den vorangegangenen Aufgabenstellungen seit A[41,0], so dass der Verlauf der ersten 19,0 Züge damit auch feststeht. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. Sf3 c5 7. Ld3 Dc7 8. O-O Sc6 9. e5 O-O-O 10. a3 Tf8 11. Te1 g5 12. Ta2 h6 13. Le3 f5 14. exf6 Lxc3 15. bxc3 Txf6 16. Tb2 Tf5 17. Tbb1 Dh2+ 18. Kxh2 Tf7 19. Te2 Tfh7 20. Th1 Sa5 21. Tb1 c4 22. Tb6 h5 23. Sxg5 Se7 24. Kg3 Tf8 25. f3 Sg6 26. Kf2 (25,5 Züge).

Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-2, 5, 8, 14-22 und 26 exakt fest. Die Zugpaare Nr. 3+4 und Nr. 6+7 sind jeweils vertauschbar, und für die fünf Züge Nr. 9-13 gibt es 60 Kombinationen. Für den Räumungszug des wS von f3 gibt es zwei Möglichkeiten zur Auswahl (Sf3xg5 oder Sf3-d2), und bei vorgegebener Auswahl des Springerzugs gibt es drei mögliche Reihenfolgen für die drei Züge Nr. 23-25; insgesamt ergibt dies sechs Kombinationen für die drei weißen Züge Nr. 23-25. Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1-9, 12-19 und 23-24 fest. Die beiden Züge Nr. 10+11 sind vertauschbar, und die Reihenfolge der drei Züge Nr. 20-22 ist beliebig (sechs Kombinationen). Für den schwarzen Abwartezug im 25. Zug gibt es die sieben Möglichkeiten Kc8-b8, Tf8-f6, Tf8-e8, La4-e8, Sa5-c6, Se7-g6 und Se7-f5+. Wir erhalten 120.960 optimale Lösungen und 14 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 25. Zug von Weiß erreicht.

#### **A[48,0]**

Durch den 48. schwarzen Zug ändert sich nichts.

#### **A[48,5]**

Der 49. weiße Zug besucht kein neues Feld, aber er kann zur Verbesserung der Lösung genutzt werden. Dadurch, dass nun der Königsturm nach h1 und b6 wandert, können gleich zwei Züge eingespart werden. Der Damenturm macht nur noch den einen Zug Ta1-a2, während der Königsturm nach der Rochade das fünfzügige Manöver Tf1-e1-b1-h1-b1-b6 ausführt. Durch das Hinzufügen des neuen Zuges Te1-b1 fallen im Gegenzug drei Züge weg: Ta2-b2-b1 und Te1-e2. Die Lösung verkürzt sich auf 23,5 Züge. Bei Schwarz fallen der Abwartezug am Ende und der Damenzug Dc7-h2 weg. Dafür muss Weiß jetzt das Feld f4 besuchen, so dass im Lösungsverlauf zuerst f2-f3-f4 und dann Sg1-f3 erforderlich ist. Weiß nimmt am Partieende in den Zügen Nr. 21-24 mit Kh2-g3-f2, a2-a3 und Ta1-a2 vier Züge zurück, die jeweils genau ein Feld verlieren. Schwarz beginnt im Rückwärtsspiel zunächst mit dem gewohnten Manöver 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7. Davor sind in den drei Zügen Nr. 19-21 mit Sc6-a5, c5-c4 und h6-h5 drei Züge an der Reihe, die jeweils genau ein Feld verlieren. Weiß verliert im 20. Zug mit Tb1-b6 zwei Felder und hat dann im 18.+19. Zug mit b2xc3 und Th1-b1 zwei Freizüge zur Auswahl. Im Rückwärtsspiel ist dabei zuerst 19. b2xc3 zu wählen, weil dieser Zug Schwarz den Freizug 18... Lb4xc3 gestattet. Im 17. Zug ist sowohl 17... Tf7-h7 als auch 17. Tb1-h1 erzwungen. Schwarz setzt im 15.+16. Zug mit den beiden Freizügen Tf6-f5-f7 fort, während Weiß im Rückwärtsspiel zuerst mit 16. Kg1-h2 ein Feld und dann mit 15. h2-h4 zwei Felder verliert. Die Rücknahme von Te1-b1 wird hinausgezögert, weil dieser Zug drei Felder verliert. Schwarz verliert im 14. Zug ein Feld und entscheidet sich zwischen den beiden Möglichkeiten Tf8xf6 und h7-h6 für die Auswahl Tf8xf6, weil diese Weiß den Freizug 14. e5xf6 gestattet. Im weiteren Rückwärtsspiel ist die Antwort 13... f7-f5 erzwungen, und Weiß erhält mit 13. e4-e5 nochmals die Gelegenheit, nur ein Feld zu verlieren. Nun ist 12... h7-h6 der einzige Zug, der nur ein Feld verliert, und schließlich ist im 12. Zug der Punkt erreicht, da Weiß die Rücknahme von Te1-b1 nicht mehr vermeiden kann. Im 10.+11. nimmt Schwarz mit Td8-f8 und g7-g5 zwei Züge zurück, die je zwei Felder verlieren; und Weiß verliert in den beiden Zügen Tf1-e1 und Lc1-e3 je ein Feld. Im 9. Zug ist sowohl die schwarze als auch die weiße Rochade erzwungen. Die Züge Nr. 6-8 erfolgen bei Schwarz nach gewohntem Muster. Weiß nimmt in den beiden Zügen Nr. 7+8 die beiden üblichen Freizüge zurück und schließt dann in den beiden Zügen Nr. 5+6 das Manöver f2-f3-f4 an, das zumindest im 5. Zug noch einen Freizug bringt. Die weitere Rücknahme der weißen Züge Nr. 1-4 ist eindeutig: 4. Sb1-c3 verliert nur ein Feld, 3. d2-d4 verliert nur zwei Felder, und 2. Dd1-g4 und 1. e2-e4 sind dann klar. Schwarz hat im 5. Zug die Wahl zwischen den beiden Läuferzügen Ld7-a4 und Lf8-b4, die jeweils genau drei Felder verlieren. Wie sich

herausstellt, sind beide gleichwertig: Entweder geschieht 5... Ld7-a4 und 4... Lc8-d7 oder 5... Lf8-b4 und 4... e7-e6. Im 3. Zug muss dann der andere der beiden Läuferzüge erfolgen (wegen des Schachs auf der Diagonalen b4-e1), und der Rest ist klar. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4. Sc3 Ld7 5. f3 La4 6. f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. Te1 Tf8 11. Le3 g5 12. Teb1 h6 13. e5 f5 14. exf6 Txf6 15. h4 Tf5 16. Kh2 Tf7 17. Th1 Tfh7 18. Thb1 Lxc3 19. bxc3 Sa5 20. Tb6 c4 21. a3 h5 22. Ta2 Se7 23. Kg3 Tf8 24. Kf2 (23,5 Züge).

Bei Schwarz sind die Züge Nr. 1, 6-9, 12-18 und 22-23 eindeutig. In den vier Zügen Nr. 2-5 ist die Reihenfolge zwischen den beiden zweizügigen Manövern e7-e6, Lf8-b4 und Lc8-d7-a4 beliebig – für diese vier Züge gibt es also zwei Kombinationen. Die beiden Züge Nr. 10+11 sind vertauschbar, und die Reihenfolge der drei Züge Nr. 19-21 ist beliebig (sechs Kombinationen). Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-6, 9 und 12-20 exakt fest. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar, ebenso die beiden Züge Nr. 10+11. In den vier Zügen Nr. 21-24 müssen die beiden Züge a2-a3 und Ta1-a2 in dieser Reihenfolge geschehen und ebenso die beiden Züge Kh2-g3-f2 in dieser Reihenfolge; insgesamt gibt es dafür sechs Kombinationen. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen ist mit 576 ungewöhnlich gering, und die Schlussstellung ist eindeutig.

#### **A[49,0] bis A[51,5]**

Der 49.-51. schwarze und der 50.-52. weiße Zug ändern nichts an der Lösung.

#### **A[52,0]**

Der 52. schwarze Zug besucht das neue Feld a6, und wir erhalten  $F[52,0] = 57$ . Im Verlauf der Partie *CarCar* fehlen nur noch die drei Felder a1, c2 und g2. Für die Lösung der Aufgabenstellung A[52,0] wird der schwarze Turmzug Tb6-a6 benötigt, dazu außerdem als Vorbereitung eine der beiden Turmwanderungen Th7-d7-d6-b6 oder Tf8-e8-c8-c6-b6. Da letztere einen Zug mehr benötigt (und außerdem noch Räumungszüge von König und Dame), erweist sich die Wanderung Th7-d7-d6-b6 als vorteilhafter. Bei Schwarz kommen also vier Turmzüge hinzu. Im Gegenzug gibt Schwarz die Verantwortung für das Feld h5 an Weiß ab, d.h. der Zug h6-h5 entfällt. Schwarz muss mindestens 26 Züge ausführen, so dass die Partie sich auf 26,0 Züge verlängert. Damit für den Zug Th7-d7 nicht der Königsspringer auf dem Feld e7 im Weg steht, muss die Wanderung von f8 bis nach a6 vom Damenturm ausgeführt werden. Die 26 schwarzen Züge lauten O-O-O, Dd8-c7, Td8-f8-f6-f5-f7-h7-d7-d6-b6-a6, Th8-f8, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6-a5, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Weiß muss zusätzlich zu den bisherigen 24 Zügen jetzt noch das Feld h5 besuchen, d.h. 25 weiße Züge sind verplant. Schwarz nimmt am Partieende einen Zug zurück, der nur ein Feld verliert und davor möglichst viele Freizüge ermöglicht. Es stellt sich heraus, dass zu diesem Zweck 26... Tb6-a6 der günstigste Zug ist, da es davor die beiden Freizüge 25... Td6xb6 und 24... Td7-d6 gibt. Weiß spielt im 26. Zug einen reinen Abwartezug als Freizug; die übrigen 25 weißen Züge stehen dann fest: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2, Tf1-e1-b1-h1-b1-b6, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4-e5xf6, f2-f3-f4, h2-h4-h5. In den fünf Zügen Nr. 21-25 nimmt Weiß fünf Züge zurück, die jeweils genau ein Feld verlieren: Kh2-g3-f2, Ta1-a2, a2-a3, h4-h5. Die Rücknahme Tb1-b6 verbietet sich, weil dieser Zug mit b2 und b3 mindestens zwei Felder verliert (und wie sich herausstellt, sogar noch das dritte Feld b6). Schwarz kann im 23. Zug nochmals einen Zug spielen, der ein Feld verliert und zwei Freizüge möglich macht: 23... Th8-f8, 22... Sg8-e7 und 21... Th7-d7. Im 19.+20. Zug nimmt Schwarz zwei Züge zurück, die je ein Feld verlieren: Sc6-a5 und c5-c4. Weiß ist im 20. Zug zur Rücknahme Tb1-b6 gezwungen. Nach 18,5 Zügen entsteht schließlich die gleiche Position wie in den Lösungen der vorangegangenen Aufgabenstellungen seit A[48,5]. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4.

Sc3 Ld7 5. f3 La4 6. f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. Te1 Tf8 11. Le3 g5 12. Teb1 h6 13. e5 f5 14. exf6 Txf6 15. h4 Tf5 16. Kh2 Tf7 17. Th1 Tfh7 18. Thb1 Lxc3 19. bxc3 Sa5 20. Tb6 c4 21. a3 Td7 22. Ta2 Se7 23. h5 Tf8 24. Kg3 Td6 25. Kf2 Txb6 26. Dh3 Ta6 (26,0 Züge).

Bei Schwarz sind die Züge Nr. 1, 6-9, 12-18 und 21-26 eindeutig. In den vier Zügen Nr. 2-5 gibt es zwei mögliche Kombinationen für die beiden zweizügigen Folgen e7-e6, Lf8-b4 und Lc8-d7-a4. Die beiden Züge Nr. 10+11 sind vertauschbar, ebenso die beiden Züge Nr. 19+20. Bei Weiß stehen die Züge Nr. 1-6, 9 und 12-20 fest. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar, ebenso die beiden Züge Nr. 10+11. In den fünf Zügen Nr. 21-25 müssen die beiden Züge a2-a3 und Ta1-a2 in dieser Reihenfolge gespielt werden und ebenso die beiden Züge Kh2-g3-f2. Es gibt fünf Positionen für den Zug h4-h5 und dann noch sechs Möglichkeiten, die beiden zweizügigen Zugfolgen zu verteilen. Insgesamt gibt es für die fünf Züge Nr. 21-25 damit 30 Kombinationen. Im 26. Zug hat Weiß die sechs Möglichkeiten Dg4-h3, Ta2-b2, Ld3-e2, Sf3xg5, Sf3-d2 und g2-g3. Es gibt 5.760 optimale Lösungen und sechs verschiedene Schlusstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 25. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[52,5] bis A[60,0]**

In diesen acht weißen und acht schwarzen Zügen ändert sich nichts.

### **A[60,5]**

Der 61. weiße Zug besucht das neue Feld a1, und wir erhalten  $F[60,5] = 58$ . Im Verlauf der Partie *CarCar* fehlen nur noch die beiden Felder c2 und g2. Für die Lösung der Aufgabenstellung A[60,5] wird der weiße Turmzug Te1-a1 benötigt. Die Wanderung bis nach b6 obliegt jetzt wieder dem weißen Damenturm (Ta1-a2-b2-b1-h1-b1-b6), während der Königsturm nach Tf1-e1-a1 auf dem Feld a1 verbleibt. Die beiden weißen Türme brauchen zwei Züge mehr als bisher. Da wir bisher am Partieende einen weißen Abwartezug hatten, verlängert die Partie sich um einen Halbzug auf 26,5 Züge. Die beiden Züge des Königsturms Tf1-e1-a1 müssen abgeschlossen sein, bevor der Damenturm mit Tb2-b1 die erste Reihe betritt; insbesondere verliert der Zug Te1-a1 vier Felder. Die Züge aller anderen (weißen und schwarzen) Steine bleiben unverändert. Alle 27 weißen und alle 26 schwarzen Züge stehen fest, und damit auch beinahe vollständig die Schlusstellung – wobei allerdings a priori noch eine Unklarheit besteht: Wenn wTb1-b6 im Lösungsverlauf vor sTd6-b6-a6 stattfindet, dann ist das Feld b6 in der Schlusstellung leer, während es im anderen Fall (sTd6-b6-a6 vor wTb1-b6) von einem wT besetzt ist. Diese Unklarheit wird im Rückwärtsspiel aus der Schlusstellung heraus allerdings sofort aufgelöst: Weiß kann im letzten (27.) Zug grundsätzlich die Züge Kg3-f2, Tb1-b6 und h4-h5 zurücknehmen. Der Königs- und der Bauernzug verlieren jeweils ein Feld; aber dies trifft auch auf den Turmzug zu (Feld b3), wenn er im 27. Zug gespielt wird – denn dann wurde das Feld b6 ja bereits zuvor durch sTd6-b6 besucht. Da der Turmzug Tb1-b6 außerdem davor den Freizug Th1-b1 ermöglicht, muss Weiß sich also im Rückwärtsspiel für das Manöver 27. Tb1-b6 und 26. Th1-b1 entscheiden. Es folgt, dass der schwarze Turmzug Td6-b6 das Feld b6 verliert – und deshalb beginnt Schwarz am Ende des Lösungsverlaufs wie gewohnt mit 26... Th8-f8 und 25... Sg8-e7. Weiß hat im 25. Zug wieder die Auswahl zwischen drei Zügen, die je ein Feld verlieren – und muss sich wieder für die einzige Variante entscheiden, die im 24. Zug einen Freizug ermöglicht: 25. Tb1-h1 und 24. Tb2-b1. Schwarz hat im 24. Zug ebenfalls die Wahl zwischen drei Zügen, die nur ein Feld verlieren. Hier fällt die Wahl auf 24... Tb6-a6; dieser Zug ermöglicht zwar keinen Freizug im 23. Zug, aber immerhin im 22. Zug: 23... Td6-b6 und 22... Td7-d6. Weiß hat im 23. Zug zum dritten Mal in Folge eine Zugmöglichkeit, die davor einen Freizug möglich macht: 23. Ta2-b2 und 22. b2xc3. Schwarz stehen damit im 20. und 21. Zug sogar zwei Freizüge zur Verfügung: Th7-d7 und Lb4xc3. Weiß verliert in den

vier Zügen Nr. 18-21 nun jeweils genau ein Feld: Kg1-h2-g3-f2 und h4-h5. Schwarz tut es ihm in den beiden Zügen Nr. 18+19 mit Sc6-a5 und c5-c4 gleich. Bei Schwarz ist dann 17... Tf7-h7 erzwungen, was wiederum die beiden Freizüge 16... Tf5-f7 und 15... Tf6-f5 nach sich zieht. Weiß kann im 17. Zug noch einmal die Rücknahme von Te1-a1 hinauszögern, indem er 17. h2-h4 zieht; davor ist dann 16. Te1-a1 erzwungen. Im 15. Zug hat Weiß die Auswahl zwischen mehreren Zügen, die genau ein Feld verlieren (Ta1-a2, Tf1-e1, Lc1-e3). Schwarz hat im 14. Zug die beiden Möglichkeiten Tf8xf6 und h7-h6, unter denen sich wie gewohnt 14... Tf8xf6 durchsetzt, weil dadurch der Freizug 14. e5xf6 möglich wird. Darauf ist im Rückwärtsspiel die Antwort 13... f7-f5 erzwungen. In den vier Zügen Nr. 10-13 verliert Weiß nun wieder jeweils ein Feld, wobei sich zu den beiden Zügen aus der obigen Liste von Kandidaten für den 15. Zug, die dort nicht gewählt wurden, noch a2-a3 und e4-e5 hinzugesellen. Die drei schwarzen Züge Nr. 10-13 und davor die gesamte Anfangsphase der Lösung (9,0 Züge) verlaufen nach gewohnten Mustern. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4. Sc3 Ld7 5. f3 La4 6. f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 g5 12. Te1 h6 13. Ta2 f5 14. exf6 Txf6 15. Le3 Tf5 16. Tea1 Tf7 17. h4 Tfh7 18. h5 Sa5 19. Kh2 c4 20. Kg3 Lxc3 21. Kf2 Td7 22. bxc3 Td6 23. Tb2 Tb6 24. Tbb1 Ta6 25. Th1 Se7 26. Thb1 Tf8 27. Tb6 (26,5 Züge).

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1, 6-9, 12-17 und 22-26 fest. Für die vier Züge Nr. 2-5 gibt es zwei Kombinationen, und die drei Zugpaare Nr. 10+11, Nr. 18+19 und Nr. 20+21 sind jeweils vertauschbar. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-6, 9, 14, 16-17 und 22-27 festgelegt. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar. In den fünf Zügen Nr. 10-13 und 15 muss zunächst der Zug e4-e5 in den ersten vier der fünf Züge untergebracht werden; dann gibt es noch vier Positionen für den Zug Tf1-e1 und danach drei Positionen für den Zug Lc1-e3; und die beiden verbleibenden Züge stehen dann fest. Für die fünf Züge Nr. 10-13 und 15 gibt es damit 48 Kombinationen. In den vier Zügen Nr. 18-21 ist die Position des Bauernzugs h4-h5 beliebig wählbar, und der Rest steht dann fest. Insgesamt erhalten wir 6.144 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[61,0]**

Der 61. schwarze Zug ändert nichts.

### **A[61,5]**

Der 62. weiße Zug besucht kein neues Feld, aber er kann zur Verbesserung der Lösung genutzt werden. Jetzt wandert wieder der Königsturm nach b6: Tf1-e1-a1-b1-h1-b1-b6. Der Damenturm bleibt nach Ta1-a2 auf a2 stehen. Damit benötigen die beiden weißen Türme zusammen einen Zug weniger als bisher, so dass die Lösung sich auf 26,0 Züge verkürzt. Der Zug Tb1-b6 verliert jetzt mindestens zwei Felder (b2 und b3), so dass er im Rückwärtsspiel aus der Schlussstellung heraus länger gemieden werden muss; und deshalb erweist es sich unter diesen Bedingungen als günstiger, das Manöver sTd6-b6-a6 im Lösungsverlauf nach wTb1-b6 zu spielen. Dadurch erhält Schwarz am Partieende die Gelegenheit zu mehr Freizügen. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4. Sc3 Ld7 5. f3 La4 6. f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 g5 12. Te1 h6 13. Ta2 f5 14. exf6 Txf6 15. Le3 Tf5 16. Tea1 Tf7 17. h4 Tfh7 18. Kh2 Sa5 19. Tb1 c4 20. Th1 Lxc3 21. bxc3 Td7 22. Tb1 Se7 23. Tb6 Tf8 24. h5 Td6 25. Kg3 Txb6 26. Kf2 Ta6 (26,0 Züge).

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1, 6-9, 12-17 und 22-26 fest. Für die vier Züge Nr. 2-5 gibt es zwei Kombinationen, und die drei Zugpaare Nr. 10+11, Nr. 18+19 und Nr. 20+21 sind jeweils vertauschbar. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-6, 9, 14, 16-20 und 23 festgelegt. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar, und für die fünf Züge Nr. 10-13 und 15 gibt es 48 Kombinationen. Die beiden Züge Nr.

21+22 sind grundsätzlich vertauschbar; allerdings besteht hier eine Abhängigkeit von der Reihenfolge der beiden schwarzen Züge Nr. 20+21: Im Fall von 20... Lxc3 kann die Reihenfolge der beiden weißen Züge beliebig gewählt werden, während im Fall von 20... Td7 die Reihenfolge 21. Tb1 und 22. bxc3 erforderlich ist. Für die beiden schwarzen Züge Nr. 20+21 und die beiden weißen Züge Nr. 21+22 gibt es damit zusammen drei Kombinationen. Für die drei weißen Züge Nr. 24-26 gibt es drei Kombinationen. Insgesamt haben wir damit 13.824 optimale Lösungen. Die Schlussstellung ist eindeutig.

### **A[62,0] bis A[65,5]**

Die vier schwarzen Züge Nr. 62-65 und die vier weißen Züge Nr. 63-66 ändern nichts.

### **A[66,0]**

Der 66. schwarze Zug besucht kein neues Feld, aber er kann zur Verbesserung der Lösung genutzt werden. Durch den Bauernzug a7-a5 besucht Schwarz die beiden Felder a6 und a5 und kann damit im Gegenzug die fünf Züge Th7-d7-d6-b6-a6 und Sc6-a5 einsparen. Indem Schwarz nun von Weiß die Aufgabe übernimmt, das Feld h5 zu besuchen, kann die Länge der Lösung um 1,5 Züge auf 24,5 Züge verkürzt werden. Die 25 weißen Züge stehen fest: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2, Tf1-e1-a1-b1-h1-b1-b6, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4-e5xf6, f2-f3-f4, h2-h4. Bei Schwarz stehen jedenfalls 21 Züge fest: O-O-O, Dd8-c7, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Lc8-d7-a4, Lf8-b4-c3, Sb8-c6, Sg8-e7, a7-a5, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Hinzu kommt je ein Zug für das Feld e8 (Td8-f8 oder La4-e8) und für das Feld h5 (Le8-h5 oder h6-h5); ein schwarzer Zug ist noch frei. Weiß verliert im Rückwärtsspiel aus der Schlussstellung zunächst in dem zweizügigen Manöver 25. Kg3-f2 und 24. Kh2-g3 jeweils ein Feld, bevor er im 23. Zug zur Rücknahme 23. Tb1-b6 gezwungen ist. Schwarz spielt im 24. Zug einen Abwartezug (Freizug). Die ersten 23 schwarzen Züge müssen die oben aufgezählten Züge sein, wobei nun für La4-e8 allerdings keine Zeit mehr ist: Davor müsste ja bereits O-O-O geschehen und davor Sb8-c6, und dann steht der sSc6 dem Läuferzug im Weg. Also sind für die Besuche auf den beiden Feldern e8 und h5 die beiden Züge Td8-f8 und h6-h5 erforderlich. Nach gewohntem Muster setzt Schwarz im Rückwärtsspiel mit 23... Th8-f8 und 22... Sg8-e7 fort. Weiß verfügt im 21.+22. Zug über die beiden Freizüge b2xc3 und Th1-b1, wobei die Wahl im 22. Zug auf b2xc3 fallen muss, weil dadurch Schwarz die Gelegenheit zu dem Freizug 21... Lb4xc3 erhält. Im 19.+20. Zug verliert Schwarz mit c5-c4 und h6-h5 jeweils genau ein Feld. Im 20. Zug von Weiß ist Tb1-h1 erzwungen, und im 19. Zug hat Weiß dann den Freizug Ta1-b1. Im 18. Zug hat Schwarz die Wahl zwischen den beiden Zügen Tf7-h7 und a7-a5, die je zwei Felder verlieren. Hier gebührt dem Zug 18... Tf7-h7 der Vorrang, weil dadurch die beiden Freizüge 17... Tf5-f7 und 16... Tf6-f5 möglich werden. Weiß zögert im Rückwärtsspiel den Zug Te1-a1 möglichst lange hinaus, indem er zunächst 18. Kg1-h2 und 17. h2-h4 spielt und dann erst zu 16. Te1-a1 greift. Im 15. Zug entscheidet sich Schwarz für 15... Tf8xf6, um Weiß den Freizug 15. e5xf6 zu ermöglichen. Dann ist 14... f7-f5 erzwungen. Weiß verliert in den fünf Zügen Nr. 10-14 jeweils ein Feld, indem er die fünf hinlänglich bekannten Züge a2-a3, Ta1-a2, Tf1-e1, Lc1-e3 und e4-e5 spielt. Im 13. Zug von Schwarz ist h7-h6 die einzige Möglichkeit, nur ein Feld zu verlieren. Davor verliert Schwarz in den drei Zügen Nr. 10-12 jeweils zwei Felder (Züge Td8-f8, a7-a5 und g7-g5). Die ersten 9,0 Züge der Partie verlaufen wie gewohnt. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4. Sc3 Ld7 5. f3 La4 6. f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. e5 Tf8 11. a3 g5 12. Te1 a5 13. Ta2 h6 14. Le3 f5 15. exf6 Txf6 16. Tea1 Tf5 17. h4 Tf7 18. Kh2 Tfh7 19. Tb1 c4 20. Th1 h5 21. Tb1 Lxc3 22. bxc3 Sge7 23. Tb6 Tf8 24. Kg3 Sg6 25. Kf2 (24,5 Züge).

Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-6, 9 und 15-25 exakt festgelegt. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar, und für die fünf Züge Nr. 10-14 gibt es 60 Kombinationen. Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1, 6-9, 13-18 und 21-23 fest. Für die vier Züge Nr. 2-5 gibt es zwei Kombinationen. Die Reihenfolge der drei Züge Nr. 10-12 ist beliebig (sechs Kombinationen), und die beiden Züge Nr. 19-20 sind vertauschbar. Im 24. Zug verfügt Schwarz über die fünf Abwartezüge Kc8-b8, Tf8-e8, Tf8-f6, Se7-f5+ und Se7-g6. Es gibt 14.400 optimale Lösungen und fünf verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 24. Zug von Weiß erreicht.

### **A[66,5]**

Der 67. weiße Zug ändert nichts.

### **A[67,0]**

Der 67. schwarze Zug besucht das neue Feld g2, und wir erhalten  $F[67,0] = 59$ . Im Verlauf der Partie *CarCar* fehlt nur noch das einzige Feld c2. Für die Lösung der Aufgabenstellung  $A[67,0]$  wird die schwarze Läuferwanderung La4-e8-h5-g6-f5-e4-g2 benötigt. Schwarz muss zwingend die folgenden 26 Züge ausführen: O-O-O, Dd8-c7, Th8-f8, Tf8-f6-f5-f7-h7, Lc8-d7-a4-e8-h5-g6-f5-e4-g2, Lf8-b4-c3, Sb8-c6, Sg8-e7, c7-c5-c4, d7-d5, e7-e6, f7-f5, g7-g5, h7-h6. Hinzu kommt noch ein Zug für das Feld a6 (Tb6-a6 oder a7-a5). Außerdem geschieht La4-e8 erst nach O-O-O, also auch nach Sb8-c6, und deshalb muss der Damenspringer nach Sb8-c6 noch einen weiteren Zug ausführen (Sc6-a5 oder Sc6-e7). Damit macht Schwarz schon mindestens 28 Züge. Blicke es bei diesen 28 Zügen, so würde der Königsspringer nach Sg8-e7 das Feld e7 blockieren, so dass der Damenspringer von c6 aus nach a5 ausweichen müsste und dort verbliebe. Dann wäre allerdings a7-a5 nicht möglich; es wäre Tb6-a6 erforderlich, was allerdings wegen der drei Vorbereitungszüge Th7-d7-d6-b6 zu viel Zeit benötigen würde. Also braucht Schwarz sogar 29 Züge. Wir wollen eine Lösung mit 29,0 Zügen konstruieren. Auch dafür ist allerdings das Manöver Th7-d7-d6-b6-a6 zu langsam, so dass der Zug a7-a5 zwingend vorkommen muss. Wir kennen also bereits 27 Züge von Schwarz exakt. Hinzu kommt als weiterer Zug entweder Sc6-a5 oder Sc6-e7. Im Fall von Sc6-a5 muss der Springer das Feld a5 für den Bauern wieder räumen (Sa5-c6). Im Fall von Sc6-e7 betreten beide Springer im Lösungsverlauf das Feld e7, so dass noch ein Springerzug von e7 aus erforderlich ist (Se7-f5 oder Se7-g6). Die beiden noch offenen schwarzen Züge sind also zwei Springerzüge: Entweder Sc6-a5-c6 oder Sc6-e7 und Se7-f5/g6. In jedem Fall haben wir in der Schlussstellung einen sS auf e7; der andere steht auf einem der drei Felder c6, f5, g6. Für den Turmzug Td8-f8 ist diesmal keine Zeit mehr (das Feld e8 wird vom Zug La4-e8 besucht), so dass die Wanderung nach h7 diesmal vom Königsturm ausgeführt werden muss (anders als in den vorangegangenen Lösungen seit  $A[40,0]$ ).

Bei Weiß sind die folgenden 20 Züge zwingend erforderlich: O-O, Kg1-h2-g3-f2, Dd1-g4, Ta1-a2, Tf1-e1, Te1-a1, Tb1-h1, Tb1-b6, Lc1-e3, Lf1-d3, Sb1-c3, Sg1-f3, a2-a3, b2xc3, d2-d4, e2-e4, f2-f3, h2-h4. Hinzu kommen zwei Turmzüge, in denen jeweils zur Vorbereitung von Tb1-h1 und von Tb1-b6 ein Turm auf dem Feld b1 bereitgestellt wird. Weiterhin muss Weiß das Feld f4 besuchen (f3-f4 oder Le3-g5), und der erste Stein, der nach f3 zieht, muss dieses Feld für den zweiten Stein wieder räumen (f3-f4 oder Sf3-g5/d2). Diese beiden Erfordernisse sind im Zug f3-f4 kombinierbar. Bisher haben wir damit mindestens 23 weiße Züge aufgezählt. Der letzte dieser weißen Züge, der im Lösungsverlauf vorkommt, kann kein Freizug sein. Zusätzlich muss Weiß noch den sBf5 schlagen, was mindestens zwei Züge benötigt (e4-e5xf6 oder Lh5-g4xf5). Nach diesen beiden Zügen spielt sich im Lösungsverlauf noch das dreizügige schwarze Turmmanöver Tf6-f5-f7-h7 ab.

Vier weiße Züge sind vorläufig noch frei. Schwarz möchte im letzten (29.) Zug der Lösung einen Zug zurücknehmen, der nur genau ein Feld verliert. Dafür kommen grundsätzlich die Züge Le4-g2 und c5-c4 in Frage sowie außerdem a7-a5 (sofern in der Lösung das Manöver Sc6-a5-c6 vorkommt). Natürlich entscheidet sich Schwarz für denjenigen Zug, der im Lösungsverlauf davor die meisten Freizüge ermöglicht. Vor c5-c4 gibt es keinen Freizug und vor a7-a5 nur einen (Sa5-c6), während es vor Le4-g2 gleich drei sind: Lh5-g6-f5-e4. Die letzten vier schwarzen Züge der Lösung lauten damit 29... Le4-g2, 28... Lf5-e4, 27... Lg6-f5 und 26... Lh5-g6. Weiß kann in den letzten vier Zügen (Nr. 26-29) jeweils Freizüge unterbringen – diese sind alle reine Abwartezüge. Von den mindestens 23 Zügen, die oben aufgezählt wurden, kann keiner dabei sein (denn der letzte davon ist kein Freizug); und auch die beiden Züge, die den sBf5 beseitigen, sind in der Schlussphase der Partie noch nicht möglich, weil Schwarz ja danach noch Tf6-f5-f7-h7 ziehen muss. Also müssen die mindestens 25 weißen Züge, die wir oben hergeleitet haben, alle in den ersten 25 Zügen der Lösung stattfinden. Daraus folgt nun, dass das Feld f4 durch f3-f4 besucht wird: Wir haben f2-f3-f4 vor Sg1-f3. Außerdem müssen die Turmmanöver zu der Zugfolge Tf1-e1-a1-b1-h1-b1-b6 zusammengesetzt werden, und für den Schlag des sBf5 sind die beiden Bauernzüge e4-e5xf6 erforderlich. Die ersten 25 weißen Züge stehen also bis auf die Reihenfolge fest.

Da die letzten vier schwarzen Züge der Lösung Lh5-g6-f5-e4-g2 lauten, könnte ein eventueller Springerzug Se7-g6 oder Se7-f5 im Lösungsverlauf nur davor stattfinden. Damit der Springer dem Läufer nicht im Weg steht, müsste er dann von Weiß geschlagen werden. Auf dem Feld g6 ist dies nicht möglich, und auf dem Feld f5 müsste dazu Ld3-e2-h5-g4xSf5 geschehen. Diese vier Läuferzüge gehören aber nach den bisherigen Erkenntnissen alle nicht zu den ersten 25 weißen Zügen, d.h. sie könnten allenfalls in den Zügen Nr. 26-29 gespielt werden – doch dann würde der sSf5 zu spät geschlagen und würde somit 27... Lg6-f5 verhindern. Aus diesem Widerspruch können wir schließen, dass Schwarz keinen Springer nach g6 oder f5 zieht, d.h. in der Partie ist das Manöver Sc6-a5-c6 erforderlich. Wir kennen somit bis auf die Reihenfolge alle 29 schwarzen Züge exakt – und damit natürlich auch die ersten 25 Züge.

Die Stellung nach 25,0 Zügen steht damit eindeutig fest, und das weitere Rückwärtsspiel aus dieser Stellung kann mit den gewohnten Methoden durchgeführt werden. Im 25. Zug hat Schwarz genau eine Möglichkeit, einen Zug zurückzunehmen, der nur ein Feld verliert und zusätzlich davor einen Freizug ermöglicht: Es ist 25... a7-a5 und 24... Sa5-c6 erforderlich. Weiß hat nur zwei Züge zur Verfügung, die jeweils nur ein Feld verlieren: 25. Kg3-f2 und 24. Kh2-g3. Schwarz nimmt im 23. Zug nochmals einen Zug zurück, der nur ein Feld verliert und davor einen Freizug ermöglicht: 23... Le8-h5 und 22... La4-e8. Bei Weiß ist 23. Tb1-b6 erzwungen, und davor stehen mit b2xc3 und Th1-b1 zwei Freizüge zur Verfügung. Weiß wählt die Reihenfolge, die Schwarz im 21. Zug einen Freizug gestattet, und es folgt 22. b2xc3, 21... Lb4xc3 und 21. Th1-b1. Davor stehen Schwarz in den beiden Zügen Nr. 19+20 noch zwei Züge zur Verfügung, die je ein Feld verlieren: Sc6-a5 und c5-c4. Bei Weiß ist 20. Tb1-h1 erzwungen, und davor gibt es den Freizug 19. Ta1-b1. Im 18. Zug von Schwarz ist 18... Tf7-h7 erzwungen, und davor gibt es dann die beiden Freizüge 17... Tf5-f7 und 16... Tf6-f5. Weiß zögert im Rückwärtsspiel den Zug Te1-a1 möglichst lange hinaus und spielt deshalb 18. Kg1-h2, 17. h2-h4 und erst dann 16. Te1-a1. Schwarz entscheidet sich im 15. Zug für diejenige Zugmöglichkeit, die nur ein Feld verliert und außerdem Weiß einen Freizug gestattet: 15... Tf8xf6, 15. e5xf6, und daraufhin ist 14... f7-f5 erzwungen. Weiß verliert nun in den fünf Zügen Nr. 10-14 jeweils genau ein Feld (a2-a3, Ta1-a2, Tf1-e1, Lc1-e3, e4-e5). Schwarz hat im 13. Zug eine eindeutige Zugmöglichkeit, die nur ein Feld verliert: 13... h7-h6. Davor hat Schwarz die Auswahl zwischen zwei Zügen, die je zwei Felder verlieren, aber nur einer davon ermöglicht davor einen Freizug: 12... Th8-f8 und 11... Sg8-e7. Davor ist 10... g7-g5 der einzige Zug, der nur zwei Felder verliert. Die Anfangsphase der Partie (9,0 Züge) verläuft schließlich so wie gewohnt. Es ergibt sich 1. e4 d5 2. Dg4 e6 3. d4 Lb4+ 4. Sc3 Ld7 5. f3 La4 6.

f4 c5 7. Sf3 Dc7 8. Ld3 Sc6 9. O-O O-O-O 10. e5 g5 11. a3 Sge7 12. Te1 Thf8 13. Ta2 h6 14. Le3 f5 15. exf6 Txf6 16. Tea1 Tf5 17. h4 Tf7 18. Kh2 Th7 19. Tb1 Sa5 20. Th1 c4 21. Tb1 Lxc3 22. bxc3 Le8 23. Tb6 Lh5 24. Kg3 Sac6 25. Kf2 a5 26. Sxg5 Lg6 27. Le2 Lf5 28. Sf3 Le4 29. Sg5 Lxg2 (29,0 Züge).

Bei Schwarz stehen die Züge Nr. 1, 6-18 und 21-29 fest. Für die vier Züge Nr. 2-5 gibt es zwei Kombinationen, und die beiden Züge Nr. 19+20 sind vertauschbar. Bei Weiß sind die Züge Nr. 1-6, 9 und 15-25 festgelegt. Die beiden Züge Nr. 7+8 sind vertauschbar, und für die fünf Züge Nr. 10-14 gibt es 60 Kombinationen. Es bleiben die vier Abwartezüge Nr. 26-29 zu betrachten.

Von den 14 weißen Steinen, die sich nach dem 25. Zug noch auf dem Brett befinden, stehen für sechs (Tb6 und Ba3c3c2d4f4) keine Züge aus dem Vorrat von *CarCar*[67,0] zur Verfügung. Da Bf4 sich nicht rührt, kann auch Le3 nicht ziehen und damit auch nicht Kf2. Es bleiben sechs Steine übrig, die die vier Züge ausführen müssen: Dg4, Ta2, Ld3, Sf3, Bg2, Bh4. Es ist zu beachten, dass der Sf3 nach dem 29. weißen Zug nicht mehr auf dem Feld f3 stehen darf, weil er dort 29... Le4-g2 verhindern würde. Der Sf3 muss also mindestens einen der vier weißen Züge ausführen. Außerdem folgt: Wenn der Sf3 genau zwei Züge macht, so müssen dies die Züge Sf3-d2-f1 sein (denn Sf3-g5-f3 geht nicht); und wenn der Sf3 genau vier Züge macht, so muss es sich um die Züge Sf3-g5-f3-d2-f1 handeln. Wenn der Springer andererseits eine ungerade Anzahl von Zügen ausführt, so gibt es jeweils zwei Möglichkeiten: Sf3-g5/d2 sowie Sf3-g5-f3-g5/d2. Die Wanderung Sf3-d2-f1-e3 scheidet wegen des Le3 aus. Der Ld3 zieht höchstens zweimal, da zur Vorbereitung seines zweiten Zuges Le2-h5 neben dem Sf3 auch noch die Dg4 einen Zug machen muss. Für die vier Abwartezüge haben wir insgesamt das folgende Zugmaterial zur Verfügung:

- Dg4-h3-h2,
- Ta2-b2-b1-e1/h1,
- Ld3-e2-h5,
- Sf3-g5-f3-g5, Sf3-g5-f3-d2-f1, Sf3-d2-f1,
- g2-g3,
- h4-h5.

Wie schon erwähnt, müssen im Fall von Le2-h5 vorher die drei Züge Ld3-e2, Sf3-g5/d2 und Dg4-h3 stattfinden. Der Bauernzug h4-h5 kann frühestens im 27. Zug erfolgen. Abgesehen von den bereits notierten Einschränkungen für die Manöver des Sf3 bestehen keine weiteren Abhängigkeiten. Den fünf Steinen Dg4, Ta2, Ld3, Bg2, Bh4 kann man anhand der Schlussstellung noch ansehen, welche Züge sie gemacht haben. Daraus ergibt sich auch die Anzahl der Züge des Sf3, und aus der Position in Verbindung mit der Anzahl der Züge lassen sich dann auch die exakten Züge des Springers ableiten. Wir erhalten die folgende Tabelle:

Sf3	Dg4	Ta2	Ld3	Bg2	Bh4	Verläufe	Schlussstellungen
4	-	-	-	-	-	1	1
3	1	-	-	-	-	8	2
3	-	1	-	-	-	8	2
3	-	-	1	-	-	8	2
3	-	-	-	1	-	8	2
3	-	-	-	-	1	6	2
2	2	-	-	-	-	6	1
2	1	1	-	-	-	12	1
2	1	-	1	-	-	12	1
2	1	-	-	1	-	12	1
2	1	-	-	-	1	9	1
2	-	2	-	-	-	6	1
2	-	1	1	-	-	12	1
2	-	1	-	1	-	12	1
2	-	1	-	-	1	9	1
2	-	-	1	1	-	12	1
2	-	-	1	-	1	9	1
2	-	-	-	1	1	9	1
1	2	1	-	-	-	24	2
1	2	-	1	-	-	24	2
1	2	-	-	1	-	24	2
1	2	-	-	-	1	18	2
1	1	2	-	-	-	24	2
1	1	1	1	-	-	48	2
1	1	1	-	1	-	48	2
1	1	1	-	-	1	36	2
1	1	-	2	-	-	12	2
1	1	-	1	1	-	48	2
1	1	-	1	-	1	36	2
1	1	-	-	1	1	36	2
1	-	3	-	-	-	16	4
1	-	2	1	-	-	24	2
1	-	2	-	1	-	24	2
1	-	2	-	-	1	18	2
1	-	1	1	1	-	48	2
1	-	1	1	-	1	36	2
1	-	1	-	1	1	36	2
1	-	-	1	1	1	36	2

Die Gesamtzahl der Verläufe der Schlussphase beträgt 775. Es gibt 372.000 optimale Lösungen und 65 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 25. Zug von Schwarz erreicht.

#### **A[67,5] bis A[79,0]**

Die zwölf weißen und zwölf schwarzen Züge Nr. 68-79 ändern nichts.

**A[79,5]**

Der 80. weiße Zug besucht kein neues Feld und kann die Lösung nicht verbessern. Der Bauernzug f4-f5 kann aber in der Schlussphase der Partie als zusätzlicher Abwartezug verwendet werden. Nach diesem Zug werden zusätzlich auch die Züge Le3-g5 und Kf2-e3 möglich. Der Zug f4-f5 kann nicht im 28. Zug stattfinden, weil dann das Feld f5 durch den sL besetzt ist. Bei der Zählung der Schlussstellungen ist zu beachten, dass der wB auf f5 geschlagen wird, falls der Zug f4-f5 im 26. oder 27. Zug erfolgt, während er auf f5 stehen bleibt, wenn der Zug f4-f5 im 29. Zug geschieht. Der Zug Le3-g5 ist nur nach f4-f5 möglich und Kf2-e3 nur nach Le3-g5. Wenn der Zug Le3-g5 vorkommt, kann der Sf3 nicht nach g5 ziehen. Wir erhalten die folgende Tabelle der Varianten mit dem Zug f4-f5:

Bf4	Sf3	Dg4	Ta2	Ld3	Bg2	Bh4	Le3	Kf2	Verläufe	Schlussstellungen
1	3	-	-	-	-	-	-	-	6	4
1	2	1	-	-	-	-	-	-	9	2
1	2	-	1	-	-	-	-	-	9	2
1	2	-	-	1	-	-	-	-	9	2
1	2	-	-	-	1	-	-	-	9	2
1	2	-	-	-	-	1	-	-	7	2
1	2	-	-	-	-	-	1	-	5	1
1	1	2	-	-	-	-	-	-	18	4
1	1	1	1	-	-	-	-	-	36	4
1	1	1	-	1	-	-	-	-	36	4
1	1	1	-	-	1	-	-	-	36	4
1	1	1	-	-	-	1	-	-	28	4
1	1	1	-	-	-	-	1	-	10	1
1	1	-	2	-	-	-	-	-	18	4
1	1	-	1	1	-	-	-	-	36	4
1	1	-	1	-	1	-	-	-	36	4
1	1	-	1	-	-	1	-	-	28	4
1	1	-	1	-	-	-	1	-	10	1
1	1	-	-	1	1	-	-	-	36	4
1	1	-	-	1	-	1	-	-	28	4
1	1	-	-	1	-	-	1	-	10	1
1	1	-	-	-	1	1	-	-	28	4
1	1	-	-	-	1	-	1	-	10	1
1	1	-	-	-	-	1	1	-	8	1
1	1	-	-	-	-	-	1	1	4	1

Es kommen 470 Verläufe der Schlussphase und 69 Schlussstellungen hinzu. Die Gesamtzahl der optimalen Lösungen erhöht sich auf 597.600, die der Schlussstellungen auf 134. Die letzte eindeutige Position wird unverändert mit dem 25. Zug von Schwarz erreicht.

**A[80,0] bis A[81,5]**

Die beiden schwarzen Züge Nr. 80+81 und die beiden weißen Züge Nr 81+82 ändern nichts.

### **A[82,0]**

Der 82. schwarze Zug besucht das letzte noch offene Feld c2, und wir erhalten  $F[82,0] = 60$ . Für die Lösung der Aufgabenstellung A[82,0] wird die schwarze Turmwanderung Th7-d7-d6-b6-b4-b2-c2 benötigt. Andererseits kann der Läuferzug Lb4-c3 eingespart werden. Die Lösung verlängert sich auf 34,0 Züge. Die Aufgabenstellung A[82,0] wurde bereits im vorangegangenen Anhang B vollständig gelöst, denn sie unterscheidet sich nicht von der dort behandelten Aufgabenstellung A[90,0] – die zusätzlichen acht weißen und acht schwarzen Züge spielen für die Lösung keine Rolle. Wir erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. h4 e6 5. Sc3 Lb4 6. e5 g5 7. f3 Se7 8. f4 Tf8 9. Sf3 f5 10. exf6 h6 11. Ld3 Txf6 12. O-O Tf5 13. a3 Tf7 14. Te1 Th7 15. Ta2 c5 16. Kh2 Dc7 17. Kg3 Sf5+ 18. Kf2 Td7 19. Le3 Td6 20. Tea1 Tb6 21. Tb1 Sc6 22. Th1 O-O-O 23. Sd2 a5 24. axb4 Txb4 25. Le2 Txb2 26. Dh3 c4 27. Lh5 Txc2 28. Dh2 Sce7 29. Lg4 Le8 30. Lf3 Lh5 31. Lg4 Lg6 32. Lxf5 Lxf5 33. Tb2 Le4 34. Tbb1 Lxg2 (34,0 Züge).

Die Anzahl der optimalen Lösungen beträgt 3.148.738.560, die der Schlussstellungen 194. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 27. Zug von Schwarz erreicht.

### **A[82,5] bis A[90,0]**

Wie schon gesagt, ändern die acht weißen und die acht schwarzen Züge Nr. 83-90 nichts.

### **A[90,5]**

Der 91. weiße Zug besucht kein neues Feld, aber er kann zur Verbesserung der Lösung genutzt werden. Durch das weiße Läufermanöver Le3-g5-h4-d8-a5 lässt sich der schwarze Damenzug Dd8-c7 einsparen. Die Lösung verkürzt sich um einen Zug auf 33,0 Züge. Wir haben die Original-Aufgabenstellung des Wettbewerbs erreicht und erhalten 1. e4 d5 2. Dg4 Ld7 3. d4 La4 4. Le3 e6 5. Lg5 Lb4+ 6. Sc3 a5 7. Lh4 c5 8. Lxd8 Sc6 9. Lxa5 Sxa5 10. Sf3 O-O-O 11. Ld3 Tf8 12. O-O h6 13. e5 g5 14. a3 f5 15. exf6 Txf6 16. Tfe1 Tf5 17. Ta2 Tf7 18. Tea1 Tfh7 19. h4 Td7 20. h5 Td6 21. Kh2 Tb6 22. axb4 Txb4 23. Kg3 Txb2 24. Tb1 c4 25. Th1 Txc2 26. Sd2 Se7 27. f3 Tf8 28. Kf2 Le8 29. Le2 Lxh5 30. Dh3 Lg6 31. Dh2 Lf5 32. Sf1 Le4 33. f4 Lxg2 (33,0 Züge).

Wie im Anhang A ermittelt, beträgt die Anzahl der optimalen Lösungen 1.133.280, und es gibt 251 verschiedene Schlussstellungen. Die letzte eindeutige Position wird mit dem 28. Zug von Schwarz erreicht.

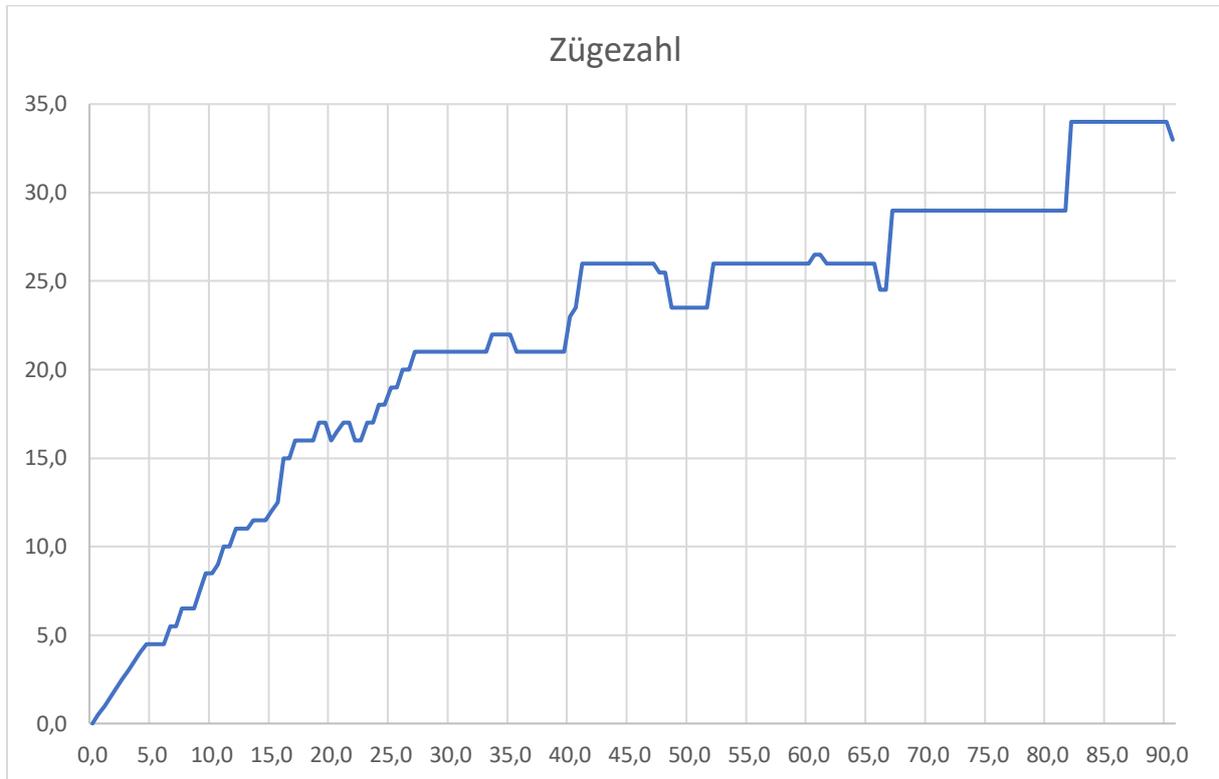
Wir fassen die im Anhang C gewonnenen Erkenntnisse in der nachstehenden Übersichtstabelle zusammen. Die Spaltenüberschriften „Zügezahl“, „Anzahl Lösungen“ und „Anzahl Schlussstellungen“ beziehen sich dabei natürlich jeweils auf die optimalen Lösungen.

<b><math>m</math> in <math>A[m]</math></b>	<b><math>F[m]</math></b>	<b>Zügezahl</b>	<b>Anzahl Lösungen</b>	<b>Anzahl Schlussstellungen</b>
0,0	0	0,0	1	1
0,5	2	0,5	1	1
1,0	3	1,0	1	1
1,5	5	1,5	2	1
2,0	7	2,0	2	1
2,5	8	2,5	2	1
3,0	11	3,0	2	1
3,5	12	3,5	2	1
4,0	13	4,0	4	1
4,5 – 6,0	14	4,5	8	1
6,5	15	5,5	24	1
7,0	15	5,5	72	3
7,5	16	6,5	192	1
8,0	17	6,5	432	3
8,5	19	6,5	48	1
9,0	20	7,5	144	3
9,5	21	8,5	864	3
10,0	22	8,5	576	1
10,5	23	9,0	1.152	1
11,0 – 11,5	24	10,0	5.760	1
12,0	25	11,0	7.680	1
12,5 – 13,0	25	11,0	15.360	2
13,5 – 14,5	27	11,5	28.800	1
15,0	29	12,0	2.880	1
15,5	30	12,5	10.080	1
16,0	31	15,0	40.320	1
16,5	31	15,0	60.480	2
17,0	34	16,0	40.320	2
17,5 – 18,0	34	16,0	161.280	4
18,5	36	16,0	70.560	4
19,0	38	17,0	161.280	4
19,5	38	17,0	211.680	6
20,0	38	16,0	40.320	5
20,5	39	16,5	5.040	1
21,0 – 21,5	40	17,0	15.120	1
22,0	40	16,0	4.320	1
22,5	40	16,0	8.640	3
23,0	41	17,0	20.160	5
23,5	42	17,0	967.680	2
24,0	43	18,0	967.680	2
24,5	43	18,0	967.680	2
25,0	45	19,0	120.960	2
25,5	45	19,0	483.840	4
26,0 – 26,5	46	20,0	1.209.600	4
27,0	47	21,0	1.451.520	4
27,5 – 29,0	47	21,0	7.499.520	8
29,5 – 30,0	47	21,0	475.217.280	35
30,5 – 31,0	47	21,0	562.930.560	43

31,5	47	21,0	752.457.600	85
32,0 – 33,0	47	21,0	241.920	4
33,5 – 35,0	48	22,0	69.120	4
35,5 – 36,0	48	21,0	29.467.800	20
36,5 – 37,0	48	21,0	30.045.600	21
37,5 – 38,0	48	21,0	41.601.600	28
38,5 – 39,0	49	21,0	835.392	12
39,5	52	21,0	28.800	1
40,0	53	23,0	20.160	13
40,5	54	23,5	25.920	1
41,0	55	26,0	17.280	6
41,5 – 45,0	55	26,0	23.040	8
45,5 – 46,0	55	26,0	28.800	10
46,5 – 47,0	55	26,0	34.560	12
47,5 – 48,0	56	25,5	120.960	14
48,5 – 51,5	56	23,5	576	1
52,0 – 60,0	57	26,0	5.760	6
60,5 – 61,0	58	26,5	6.144	1
61,5 – 65,5	58	26,0	13.824	1
66,0 – 66,5	58	24,5	14.400	5
67,0 – 79,0	59	29,0	372.000	65
79,5 – 81,5	59	29,0	597.600	134
82,0 – 90,0	60	34,0	3.148.738.560	194
90,5	60	33,0	1.133.280	251

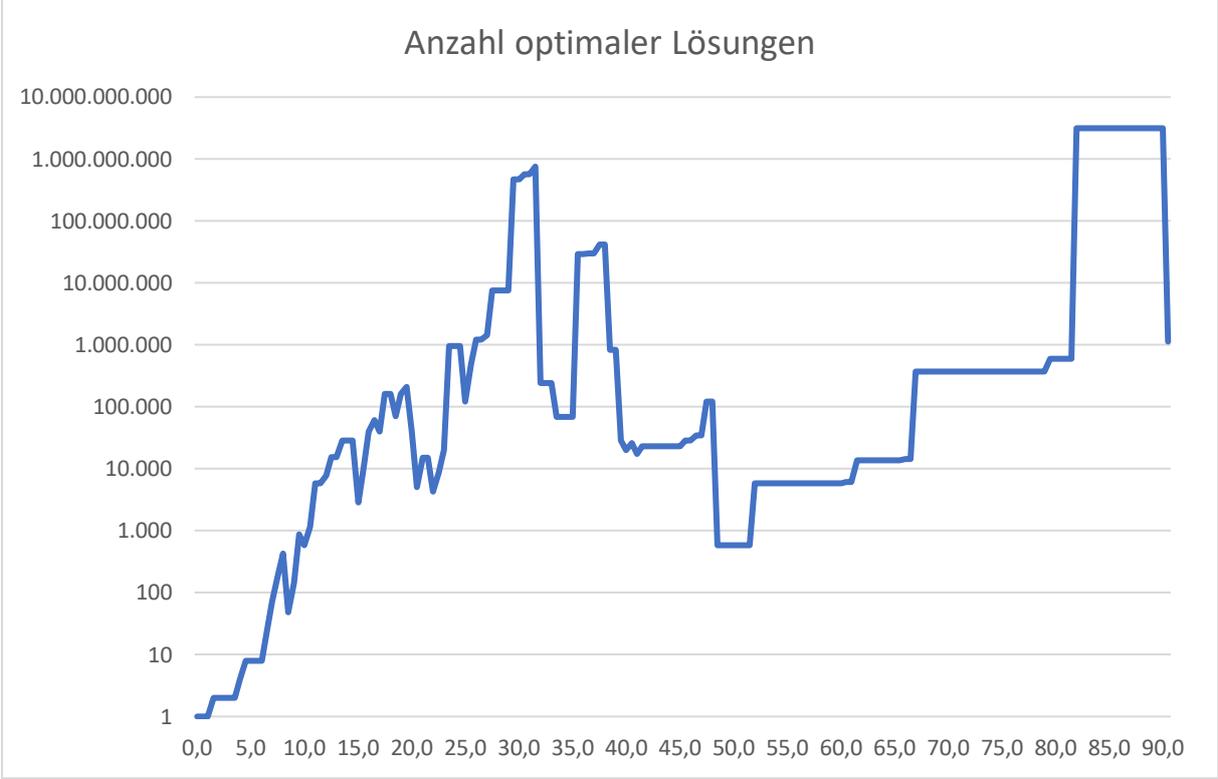
Die maximale Zügezahl einer optimalen Lösung beträgt 34,0 und wird in den Fällen A[82,0] bis A[90,0] angenommen. Die maximale Anzahl der optimalen Lösungen beträgt 3,1 Milliarden, und auch hier wird der Rekord in den Fällen A[82,0] bis A[90,0] aufgestellt. Der zweitgrößte Wert beträgt 752 Millionen und wird in der Aufgabenstellung A[31,5] erreicht. Im Bereich von A[32,0] bis A[81,5] gehen die Anzahlen wieder deutlich zurück und erreichen in den Fällen A[48,5] bis A[51,5] ein vorübergehendes Minimum, das immerhin um sechs Zehnerpotenzen geringer ausfällt als das bis dahin gesehene Maximum. Die Maximalzahl der verschiedenen Schlussstellungen ist mit 251 vergleichsweise übersichtlich und wird erst in der letzten Aufgabenstellung A[90,5] erreicht. Die letzte optimale Lösung mit eindeutiger Schlussstellung gibt es in A[65,5]. Unter ästhetischen Gesichtspunkten sind die Lösungen mit eindeutiger Schlussstellung besonders hervorzuheben, da sie ohne Abwartezüge auskommen und Weiß und Schwarz harmonisch zusammenwirken. Die letzte optimale Lösung, in der Weiß den letzten Zug ausführt, kommt in A[66,5] vor. Solche Lösungen sind (für  $m \geq 10,5$ ) vergleichsweise seltene Ausnahmen. In der Regel bestimmen die schwarzen Manöver den Lösungsverlauf, und Weiß kann in seinen letzten Zügen nur noch abwarten.

Die Resultate aus der Tabelle sollen nun noch in drei Grafiken visualisiert werden. Zuerst tragen wir die Zügezahl der optimalen Lösung der Aufgabenstellung  $A[m]$  in Abhängigkeit von dem Parameter  $m$  auf:

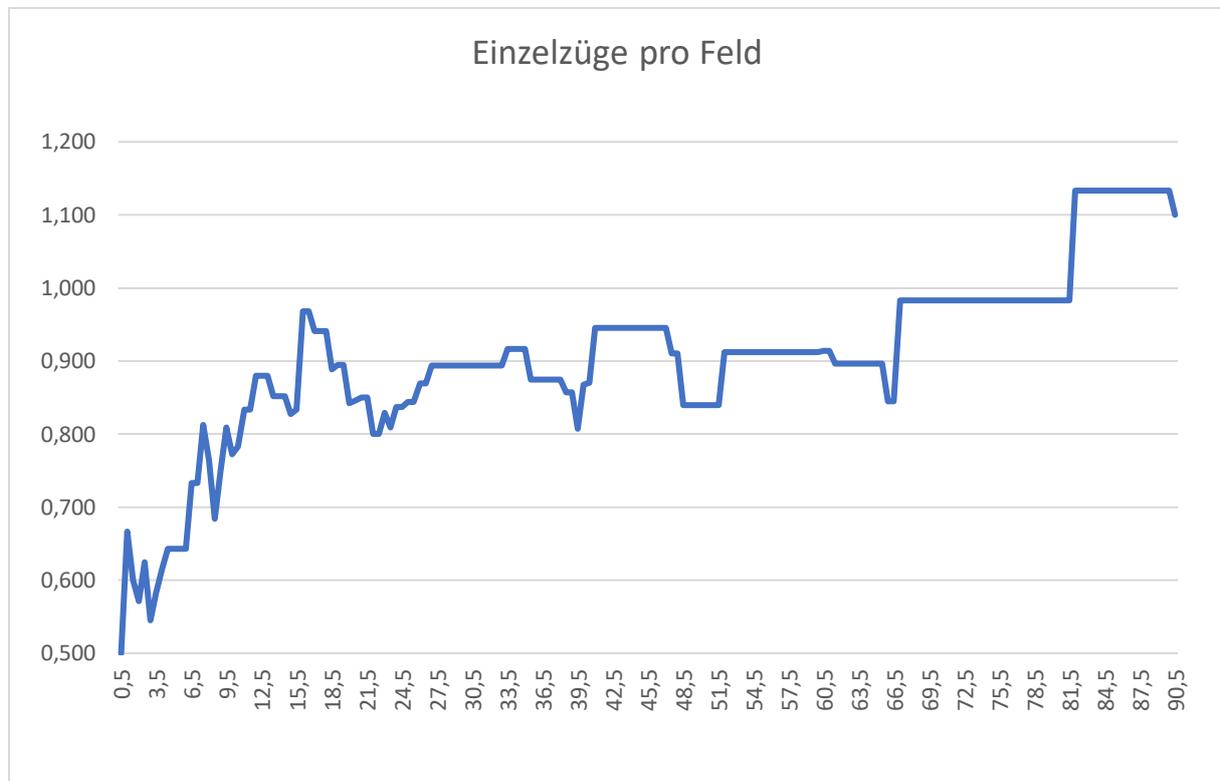


Es zeigt sich während der ersten 27,5 Züge der Partie *CarCar* ein beinahe ungebremster Anstieg der Länge der optimalen Lösung, der nur kurz im Bereich von  $A[17,0]$  bis  $A[22,5]$  unterbrochen wird. Ab  $A[27,5]$  stellen sich im Wesentlichen nacheinander vier Plateaus mit den Werten 21,0, 26,0, 29,0 und 34,0 ein, die nur von wenigen Schwankungen und Ausreißern unterbrochen werden.

In einer zweiten Grafik wird die Anzahl der optimalen Lösungen der Aufgabenstellung  $A[m]$  in Abhängigkeit von  $m$  dargestellt. Wegen der großen Schwankungsbreite der Werte wählen wir in diesem Fall eine logarithmische Skalierung auf der Werteachse.



In einer dritten Grafik betrachten wir nun noch das Verhältnis (Quotient) aus der Zügezahl und der Anzahl der besuchten Felder  $F[m]$ . Unter der Zügezahl verstehen wir an dieser Stelle ausnahmsweise die Anzahl der Einzelzüge (Halbzüge) der Partie, also das Doppelte der Zügezahl, wie sie sonst in diesem Dokument angegeben wird.



Das arithmetische Mittel des Quotienten (über alle 181 Aufgabenstellungen  $A[m]$  gebildet) beträgt 0,904. Die Kurve schwankt nur wenig um diesen Mittelwert. Von  $A[11,0]$  bis  $A[81,5]$  liegen die Werte durchgängig im Intervall von 0,8 bis 1,0. Der empirische Korrelationskoeffizient der Stichprobe aus den 182 Wertepaaren, die jeweils aus  $F[m]$  und der minimalen Zügezahl einer Lösung von  $A[m]$  bestehen ( $0,0 \leq m \leq 90,5$ ), beträgt 0,97, d.h. die Zügezahl hängt näherungsweise linear von der Zahl der zu besuchenden Felder ab.

Zum Abschluss wollen wir noch für jedes der von *CarCar* besuchten 60 Felder festhalten, von welchen konkreten Zügen das jeweilige Feld in den optimalen Lösungen der verschiedenen Aufgabenstellungen  $A[m]$  erstmalig besucht wird. Natürlich beschränken wir uns dabei stets auf diejenigen Aufgabenstellungen  $A[m]$ , in denen das jeweilige Feld überhaupt besucht wird. In der nachfolgenden Tabelle sortieren wir die 60 Felder in der Reihenfolge, in der sie in der Partie *CarCar* besucht werden.

Lfd. Nr.	Feld	Bereich für $m$ in $A[m]$	Farbe	Zug	Bemerkung
1	e3	0,5 – 90,5	W	e2-e4	
2	e4	0,5 – 90,5	W	e2-e4	
3	e6	1,0 – 90,5	S	e7-e6	

4	d3	1,5 – 13,0	W	d2-d4	
		13,5 – 22,0	W	Lf1-d3	
		22,5 – 29,0	W	d2-d4	
		29,5 – 31,5	W	Lf1-d3	
		32,0 – 35,0	W	d2-d4	
		35,5 – 38,0	W	Lf1-d3	
		38,5 – 90,5	W	d2-d4	
5	d4	1,5 – 90,5	W	d2-d4	
6	d6	2,0 – 2,5	S	d7-d5	
		3,0 – 8,0	S	Lf8-b4	
		8,5	S	d7-d5	
		9,0 – 9,5	S	Lf8-b4	
		10,0 – 13,0	S	d7-d5	
		13,5 – 22,0	S	Lf8-b4	
		22,5 – 29,0	S	d7-d5	
		29,5 – 31,5	S	Lf8-b4	
		32,0 – 35,0	S	d7-d5	
		35,5 – 38,0	S	Lf8-b4	
		38,5 – 90,5	S	d7-d5	
7	d5	2,0 – 90,5	S	d7-d5	
8	c3	2,5 – 8,0	W	Sb1-c3	
		8,5	S	Lb4-c3	
		9,0 – 10,0	W	Sb1-c3	
		10,5	S	Lb4-c3	
		11,0 – 33,0	W	Sb1-c3	
		33,5 – 38,0	S	Lb4-c3	
		38,5 – 90,5	W	Sb1-c3	
9	e7	3,0 – 90,5	S	Lf8-b4	
10	c5	3,0 – 11,5	S	Lf8-b4	
		12,0 – 13,0	S	c7-c5	
		13,5 – 90,5	S	Lf8-b4	
11	b4	3,0 – 90,5	S	Lf8-b4	
12	e5	3,5 – 24,5	W	e4-e5	
		25,0 – 35,0	S	Dc7-h2	
		35,5 – 90,5	W	e4-e5	
13	c6	4,0 – 6,5	S	c7-c5	
		7,0	S	c7-c5 oder Sb8-c6	Auswahl zwischen zwei Zügen
		7,5	S	c7-c5	
		8,0	S	c7-c5 oder Sb8-c6	Auswahl zwischen zwei Zügen
		8,5	S	Sb8-c6	
		9,0 – 9,5	S	c7-c5	
		10,0 – 11,5	S	Sb8-c6	
		12,0 – 14,5	S	c7-c5	
		15,0 – 90,5	S	Ld7-a4	
14	a3	4,5 – 90,5	W	a2-a3	

15	f3	6,5 – 13,0	W	Sg1-f3	
		13,5 – 22,0	W	Le2-h5	
		22,5 – 23,0	W	Dd1-g4	
		23,5 – 29,0	W	Sg1-f3	
		29,5 – 31,5	W	Le2-h5	
		32,0 – 35,0	W	Sg1-f3	
		35,5 – 38,0	W	Le2-h5	
		38,5 – 90,5	W	Dd1-g4	
16	e2	7,5 – 22,0	W	Lf1-d3	
		22,5 – 23,0	W	Dd1-g4	
		23,5 – 38,0	W	Lf1-d3	
		38,5 – 90,5	W	Dd1-g4	
17	d7	8,0 – 90,5	S	Lc8-d7	
18	f1	8,5 – 90,5	W	O-O	
19	g1	8,5 – 90,5	W	O-O	
20	c7	9,0 – 90,0	S	Dd8-c7	
		90,5	W	Ld8-a5	
21	e1	9,5 – 90,5	W	Tf1-e1	
22	a5	10,0 – 65,5	S	Sc6-a5	
		66,0 – 66,5	S	a7-a5	
		67,0 – 81,5	S	Sc6-a5	
		82,0 – 90,5	S	a7-a5	
23	g5	10,5 – 21,5	W	Sf3-g5	
		22,0 – 31,5	S	g7-g5	
		32,0 – 35,0	W	Sf3-g5	
		35,5 – 90,0	S	g7-g5	
		90,5	W	Lf3-g5	
24	g6	11,0 – 21,5	S	Se7-g6	Königsspringer
		22,0 – 31,5	S	g7-g5	
		32,0 – 35,0	S	Le8-h5	
		35,5 – 90,5	S	g7-g5	
25	c4	12,0 – 90,5	S	c5-c5	
26	g4	13,5 – 22,0	W	Le2-h5	
		22,5 – 29,0	W	Dd1-g4	
		29,5 – 31,5	W	Le2-h5	
		32,0 – 35,0	W	Dd1-g4	
		35,5 – 38,0	W	Le2-h5	
		38,5 – 90,5	W	Dd1-g4	

27	h5	13,5 – 22,0	W	Le2-h5	
		22,5 – 29,0	W	h4-h5	
		29,5 – 31,5	W	Le2-h5	
		32,0 – 35,0	S	Le8-h5	
		35,5 – 38,0	W	Le2-h5	
		38,5 – 39,5	S	Le8-h5	
		40,0	W	h4-h5	
		40,5	S	h6-h5	
		41,0 – 47,0	W	h4-h5	
		47,5 – 51,5	S	h6-h5	
		52,0 – 65,5	W	h4-h5	
		66,0 – 66,5	S	h6-h5	
		67,0 – 81,5	S	Le8-h5	
		82,0 – 90,0	W	Le2-h5	
		90,5	W	h4-h5	
28	b5	15,0 – 90,5	S	Ld7-a4	
29	a4	15,0 – 90,5	S	Ld7-a4	
30	a2	15,5 – 90,5	W	Ta1-a2	
31	f5	16,0 – 19,5	S	Se7-f5	Damenspringer oder Königsspringer
		20,0 – 24,0	S	Se7-f5	Königsspringer
		24,5 – 35,0	S	f7-f5	
		35,5 – 39,5	S	Se7-f5	Königsspringer
		40,0 – 90,5	S	f7-f5	
32	d8	17,0 – 90,0	S	O-O-O	
		90,5	W	Lh4-d8	
33	c8	17,0 – 90,5	S	O-O-O	
34	b8	17,0 – 90,5	S	O-O-O	
35	h3	18,5 – 90,5	W	h2-h4	
36	h4	18,5 – 90,0	W	h2-h4	
		90,5	W	Lg5-h4	
37	e8	19,0 – 31,5	S	Td8-f8	
		32,0 – 35,0	S	La4-e8	
		35,5 – 38,0	S	Td8-f8	
		38,5 – 39,5	S	La4-e8	
		40,0 – 66,5	S	Td8-f8	
		67,0 – 90,0	S	La4-e8	
		90,5	S	Td8-f8	
38	f8	19,0 – 31,5	S	Td8-f8	
		32,0 – 35,0	S	Th8-f8	
		35,5 – 38,0	S	Td8-f8	
		38,5 – 39,5	S	Th8-f8	
		40,0 – 66,5	S	Td8-f8	
		67,0 – 90,0	S	Th8-f8	
		90,5	S	Td8-f8	

39	h2	20,5 – 24,5	W	Dh3-h2	
		25,0 – 35,0	S	Dc7-h2	
		35,5 – 39,5	W	Kg1-h2	
		40,0	S	Dc7-h2	
		40,5	W	Kg1-h2	
		41,0 – 48,0	S	Dc7-h2	
		48,5 – 90,5	W	Kg1-h2	
40	h6	21,0 – 90,5	S	h7-h6	
41	g7	23,0 – 39,5	S	Sf5-g7	Königsspringer
		40,0 – 66,5	S	Tf7-h7	Damenturm
		67,0 – 90,0	S	Tf7-h7	Königsturm
		90,5	S	Tf7-h7	Damenturm
42	d2	23,5 – 31,0	W	Sf3-d2	
		31,5	W	Sf3-d2 oder Lc1-e3	Auswahl zwischen zwei Zügen
		32,0 – 90,5	W	Lc1-e3	
43	f6	24,0 – 90,0	S	f7-f5	
		90,5	W	Lh4-d8	
44	f4	25,0 – 35,0	S	Dc7-h2	
		35,5 – 39,5	W	Le3-g5	
		40,0	S	Dc7-h2	
		40,5	W	f3-f4	
		41,0 – 48,0	S	Dc7-h2	
		48,5 – 90,0	W	f3-f4	
		90,5	W	Le3-g5	
45	g3	25,0 – 35,0	S	Dc7-h2	
		35,5 – 39,5	W	Kh2-g3	
		40,0	S	Dc7-h2	
		40,5	W	Kh2-g3	
		41,0 – 48,0	S	Dc7-h2	
		48,5 – 90,5	W	Kh2-g3	
46	f7	26,0 – 31,5	S	Tf8-f6	Damenturm
		32,0 – 35,0	S	Le8-h5	
		35,5 – 38,0	S	Tf8-f6	Damenturm
		38,5 – 39,5	S	Le8-h5	
		40,0 – 66,5	S	Tf8-f6	Damenturm
		67,0 – 90,0	S	Tf8-f6	Königsturm
		90,5	S	Tf8-f6	Damenturm
47	g8	27,0 – 90,5	S	Th8-f8	
48	b2	33,5 – 48,0	W	Ta2-b2	
		48,5 – 60,0	W	Tb1-b6	Königsturm
		60,5 – 61,0	W	Ta2-b2	
		61,5 – 81,5	W	Tb1-b6	Königsturm
		82,0 – 90,0	S	Tb4-b2	Königsturm
		90,5	S	Tb4-b2	Damenturm
49	b1	38,5 – 48,0	W	Tb2-b1	
		48,5 – 60,0	W	Te1-b1	
		60,5 – 90,5	W	Te1-a1	
50	c1	39,5 – 48,0	W	Tb1-h1	Damenturm
		48,5 – 60,0	W	Te1-b1	
		60,5 – 90,5	W	Te1-a1	

51	d1	39,5 – 48,0	W	Tb1-h1	Damenturm
		48,5 – 60,0	W	Te1-b1	
		60,5 – 90,5	W	Te1-a1	
52	h1	39,5 – 48,0	W	Tb1-h1	Damenturm
		48,5 – 60,0	W	Tb1-h1	Königsturm
		60,5 – 61,0	W	Tb1-h1	Damenturm
		61,5 – 90,5	W	Tb1-h1	Königsturm
53	h7	40,0 – 66,5	S	Tf7-h7	Damenturm
		67,0 – 90,0	S	Tf7-h7	Königsturm
		90,5	S	Tf7-h7	Damenturm
54	f2	40,5 – 90,5	W	Kg3-f2	
55	b6	41,0 – 47,0	S	Kc7-b6	
		47,5 – 48,0	W	Tb1-b6	Damenturm
		48,5 – 60,0	W	Tb1-b6	Königsturm
		60,5 – 61,0	S	Td6-b6	Damenturm
		61,5 – 81,5	W	Tb1-b6	Königsturm
		82,0 – 90,0	S	Td6-b6	Königsturm
		90,5	S	Td6-b6	Damenturm
56	b3	47,5 – 48,0	W	Tb1-b6	Damenturm
		48,5 – 60,0	W	Tb1-b6	Königsturm
		60,5 – 61,0	W	Tb1-b6	Damenturm
		61,5 – 81,5	W	Tb1-b6	Königsturm
		82,0 – 90,0	S	Tb4-b2	Königsturm
		90,5	S	Tb4-b2	Damenturm
57	a6	52,0 – 65,5	S	Tb6-a6	Damenturm
		66,0 – 90,5	S	a7-a5	
58	a1	60,5 – 90,5	W	Te1-a1	
59	g2	67,0 – 81,5	S	Le4-g2	
60	c2	82,0 – 90,0	S	Tb2-c2	Königsturm
		90,5	S	Tb2-c2	Damenturm

Die Liste enthält 27 Felder, die in der Gesamtheit aller optimalen Lösungen jeweils nur von einem einzigen, eindeutigen Zug erstmals besucht werden:

- mit einem weißen Zug: a1, e1, f1, g1, h1, a2, f2, a3, e3, h3, d4, e4 (12 Felder),
- mit einem schwarzen Zug: c2, g2, a4, b4, c4, b5, d5, e6, h6, d7, e7, h7, b8, c8, g8 (15 Felder).

Unter den verbleibenden 33 Feldern sind 21, die jeweils von genau zwei verschiedenen Zügen erstmals besucht werden:

- mit zwei weißen Zügen: d2, e2, d3, g4, h4 (5 Felder)
- mit zwei schwarzen Zügen: a5, c5, f5, a6, d6, f7, g7, e8, f8 (9 Felder)
- mit je einem weißen und schwarzen Zug: b3, c3, g3, e5, f6, c7, d8 (7 Felder)

Unter den dann noch verbleibenden 12 Feldern sind 11, die jeweils von genau drei verschiedenen Zügen erstmals besucht werden:

- mit drei weißen Zügen: b1, c1, d1, f3 (4 Felder)
- mit drei schwarzen Zügen: c6, g6 (2 Felder)
- mit zwei weißen und einem schwarzen Zug: b2, h2, f4, g5 (4 Felder)
- mit zwei schwarzen und einem weißen Zug: b6 (1 Feld)

Als alleiniger Rekordhalter, was die verschiedenen Züge angeht, mit denen das Feld erstmals erreicht wird, bleibt schließlich das Feld h5 übrig. In einer ansprechenden Symmetrie finden sich hier je zwei weiße und schwarze Züge, von denen wiederum jeweils einer ein Läuferzug und der andere ein Bauernzug ist: wLe2-h5, h4-h5, sLe8-h5 und h6-h5. Das Feld h5 hält gleichzeitig auch den Rekord im Hinblick auf die Anzahl der Wechsel des relevanten Zuges (wenn man die optimalen Lösungen für  $m$  von 0,0 bis 90,5 in aufsteigender Reihenfolge durchgeht): Der Zug für das Feld h5 verändert sich von A[13,5] bis A[90,5] insgesamt 14mal (darunter zehn Farbwechsel zwischen Weiß und Schwarz).

Abschließend wollen wir noch festhalten, dass sich beim Übergang von der vorletzten Aufgabenstellung A[90,0] auf die letzte Aufgabenstellung A[90,5] gleichzeitig für neun verschiedene Felder der jeweilige relevante Zug ändert. Sechs dieser neun Felder stehen im Zusammenhang mit der Wanderung des wL von c1 nach a5, nämlich f4, g5, h4, f6, d8 und c7. Hinzu kommen die beiden Felder e8 und f8, weil der schwarze Damenturm anstelle des Königsturms die Wanderung über f8 bis nach c2 übernimmt; und das neunte Feld ist der gerade vorher erwähnte Rekordhalter h5. Der Übergang von A[90,0] auf A[90,5] bildet in dieser Hinsicht allerdings keinen Rekord: Beim Wechsel von A[35,0] auf A[35,5] ändern sich sogar für beeindruckende 15 verschiedene Felder die relevanten Züge. Weiß wechselt den Zug für die drei Felder d3, f3, g4 und Schwarz für die sechs Felder f5, d6, g6, f7, e8, f8; außerdem gibt es einen Übergang von Weiß auf Schwarz für das Feld g5 und von Schwarz auf Weiß für die fünf Felder h2, g3, f4, e5, h5.